

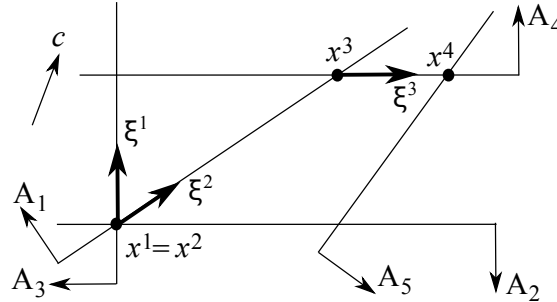
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2025/26)

Nome:

Cognome:

Matricola:

1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simpleso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di crescita (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, se l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima si discuta l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia del problema primale che del duale. Si discuta, infine, come cambierebbe l'esito di risoluzione nel caso in cui il vettore dei costi c fosse collineare ad A_4 , giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

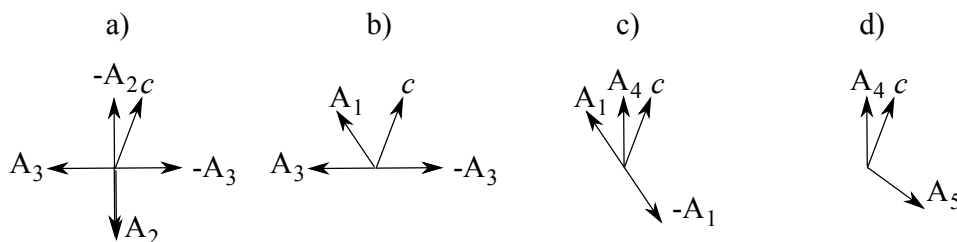
it. 1) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ e $-A_3$, come mostrato in a). Si ha quindi $h = 2$ per regola anticiclo di Bland. La base è primale degenera, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 3\}$ (esiste un vincolo attivo non in base), ma duale non degenera perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 1, che è attivo ma non in base: quindi $k = 1$, eseguendo un cambio di base degenera.

it. 2) $B = \{1, 3\}$, $y_1 > 0$ e $y_3 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_3$, come mostrato in b), quindi $h = 3$. La base è duale non degenera, mentre resta primale degenera in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, quindi $k = 4$.

it. 3) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_4 , come mostrato in c), quindi $h = 1$. La base è primale non degenera in quanto $I(x^3) = B$, e duale non degenera. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5.

it. 4) $B = \{4, 5\}$, $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_4 e A_5 , come mostrato in d). Quindi l'algoritmo termina avendo individuato in x^4 una soluzione ottima del primale. La base è sia primale che duale non degenera.

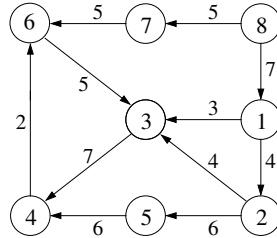
Poiché la base ottima individuata è sia primale che duale non degenera, le corrispondenti soluzioni di base, sia primale che duale, sono le uniche soluzioni ottime primali e duali, rispettivamente.



Nel caso in cui il vettore dei costi c fosse collineare ad A_4 , la base $B = \{1, 4\}$ sarebbe ottima. Si osservi che la faccia del poliedro avente come estremi il vertice x^3 e il vertice x^4 definirebbe un insieme di soluzioni ottime alternative.

2) Si consideri la rete logistica descritta dal grafo in figura, in cui il nodo 8 rappresenta la sede di un deposito, il nodo 4 la sede di un utente finale, e il valore associato a ogni arco rappresenta il massimo numero di unità di bene inviabili lungo l'arco, ovvero la capacità dell'arco. Date le caratteristiche della rete, il nodo deposito è in grado di inviare 12 unità di bene all'utente finale? Si giustifichi la risposta, e si descriva dettagliatamente l'algoritmo utilizzato per rispondere al quesito.

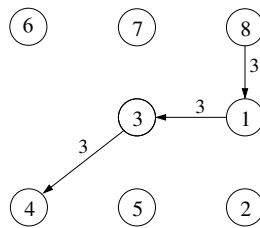
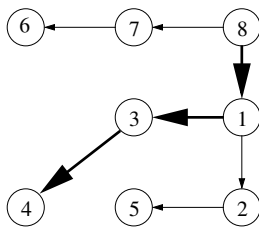
In caso di risposta negativa, si specifichi quale sia il minimo incremento complessivo di capacità degli archi necessario per l'invio di 12 unità dal nodo 8 al nodo 4, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

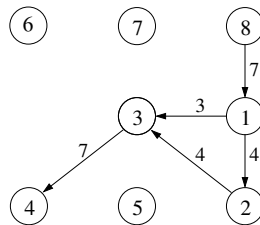
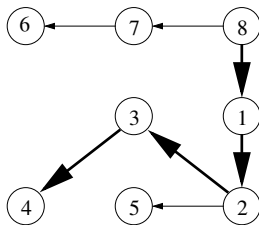
Per rispondere al quesito individuamo un flusso massimo dal nodo 8 al nodo 4 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso, lungo P , di una quantità pari alla capacità di P , trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1:



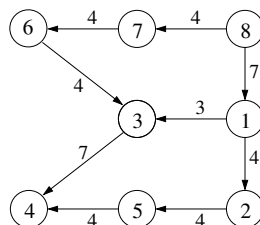
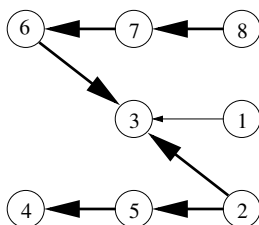
$$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$$

Iterazione 2:



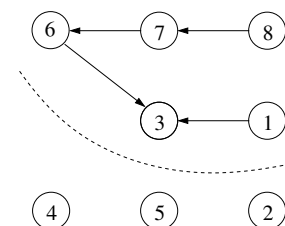
$$\theta(P, x) = 4, \quad v = 7$$

Iterazione 3:



$$\theta(P, x) = 4, \quad v = 11$$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente, di valore 11, è massimo.

Poiché il valore del flusso massimo è 11, segue che il nodo deposito non è in grado di inviare 12 unità di bene all'utente finale. Affinché ciò sia possibile, per il Teorema Flusso Massimo-Taglio Minimo è necessario incrementare la capacità complessiva della rete di almeno un'unità.

3) La ditta *BalTrans* deve caricare n pacchi su un mezzo di trasporto avente m compartimenti. Il pacco i pesa p_i chili, $i = 1, \dots, n$, mentre il comparto j può contenere al massimo u_j chili, $j = 1, \dots, m$.

Per bilanciare il carico, la ditta decide di ripartire i pacchi tra i compartimenti in modo da minimizzare la differenza di peso tra il comparto più carico e quello meno carico. Si formuli il problema della ditta *BalTrans* in termini di modello PLI.

SVOLGIMENTO

Per formulare il problema, introduciamo le seguenti nm variabili binarie:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il pacco } i \text{ è caricato nel comparto } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Introduciamo inoltre le variabili ausiliarie w e z , per stimare il peso totale dei pacchi caricati nel comparto meno carico e in quello più carico, rispettivamente.

I seguenti vincoli, di semiassegnamento, garantiscono che ogni pacco sia caricato in un solo comparto:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

I seguenti vincoli, invece, garantiscono che le capacità degli m compartimenti siano rispettate:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq u_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Infine, i seguenti vincoli garantiscono che le variabili w e z rappresentino, all'ottimo, il peso totale dei pacchi caricati nel comparto meno carico e in quello più carico, rispettivamente:

$$w \leq \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq z, \quad j = 1, \dots, m.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dalla differenza $z - w$. Il problema della ditta *BalTrans* può pertanto essere formulato nel modo seguente:

$$\min \quad z - w$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq u_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} - w \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$z - \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$