

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2025/26)**Nome:****Cognome:****Matricola:**1) Si consideri il seguente problema di *PL*:

$$\begin{array}{rcll}
\max & -3x_1 & + & 3x_2 \\
& & & 2x_2 \leq 6 \\
& -x_1 & & \leq 0 \\
& -x_1 & - & x_2 \leq -2 \\
& x_1 & + & 2x_2 \leq 1
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplexso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h , giustificando le risposte. Si indichi quindi se la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo continuerebbe a essere ottima nel caso in cui il termine noto del secondo vincolo valesse - 4 invece di 0, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = 4,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \eta_i > 0\} = 3/2,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = 1.$$

it. 2) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 9/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 9, \quad h = 2.$$

it. 3) $B = \{3, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,

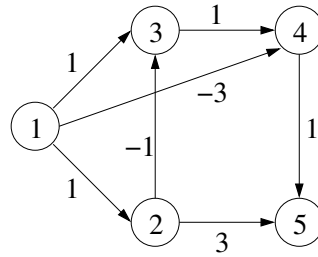
$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, la base $B = \{3, 4\}$ è ottima. La soluzione $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ è ottima per il primale, mentre la soluzione $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ è ottima per il duale.

Se il termine noto del secondo vincolo valesse - 4 invece di 0, la soluzione di base duale $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ continuerebbe a essere ammissibile. Tuttavia, la base $B = \{3, 4\}$ non sarebbe più primale ammissibile, in quanto la soluzione di base primale $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ violerebbe il secondo vincolo. Pertanto, essendo $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ una soluzione di base duale non degenera, segue che $\bar{y}$ non sarebbe una soluzione ottima duale dopo la modifica effettuata.

2) Si determini un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si riportino il nodo i selezionato, il vettore delle etichette e il vettore dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell'arco $(1, 4)$ fosse un parametro reale α , si discuta quindi per quali valori di α l'albero individuato continuerebbe a essere un albero dei cammini minimi di radice 1.



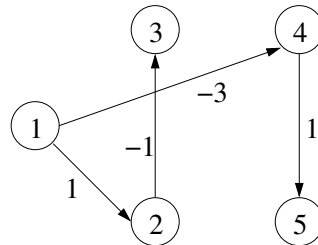
SVOLGIMENTO

Per ogni arco (i, j) del grafo in figura risulta $i < j$: segue che il grafo è aciclico e ben numerato. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$.

Sia $M = (n - 1)c_{max} + 1 = 4 \times 3 + 1 = 13$.

Iter.	i	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$
		0	13	13	13	13	nil	1	1	1	1
1	1	0	1	1	-3	13	nil	1	1	1	1
2	2	0	1	0	-3	4	nil	1	2	1	2
3	3	0	1	0	-3	4	nil	1	2	1	2
4	4	0	1	0	-3	-2	nil	1	2	1	4

Albero dei cammini minimi individuato:



Se il costo dell'arco $(1, 4)$ fosse un parametro reale α , l'etichetta del nodo 4 sarebbe $d(4) = \alpha$, mentre l'etichetta del nodo 5 sarebbe $d(5) = 1 + \alpha$. L'albero in figura continuerebbe a essere un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di α che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di Bellman. Per effettuare tale verifica, è sufficiente considerare gli archi non appartenenti all'albero che sono incidenti il nodo 4 e il nodo 5, ovvero $(3, 4)$ e $(2, 5)$:

1. $(3, 4)$: $d(3) + 1 \geq d(4)$, ovvero $1 \geq \alpha$, ovvero $\alpha \leq 1$;
2. $(2, 5)$: $d(2) + 3 \geq d(5)$, ovvero $4 \geq 1 + \alpha$, ovvero $\alpha \leq 3$.

Segue che l'albero in figura continuerebbe a essere un albero dei cammini minimi di radice 1 per $\alpha \leq 1$.

3) Un'azienda che opera nell'ambito della logistica decide di aprire al più m magazzini per servire i suoi n punti vendita. L'azienda deve stabilire anche la capacità di ogni magazzino aperto, che può essere scelta nell'insieme $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. Il costo f_{jh} di attivazione del magazzino j dipende dalla capacità u_h scelta, $j = 1, \dots, m$, $h = 1, 2, \dots, k$.

E' nota la domanda d_i del punto vendita i , $i = 1, \dots, n$, come pure il costo di assegnamento c_{ij} del punto vendita i al magazzino j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Si formuli in termini di *PLI* il problema di stabilire quali magazzini aprire, e le relative capacità, e di assegnare ogni punto vendita a esattamente un magazzino aperto, rispettando le capacità dei magazzini, con l'obiettivo di minimizzare il costo totale, dato dal costo di attivazione dei magazzini e dal costo di assegnamento dei punti vendita ai magazzini.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti nm variabili di assegnamento:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il punto vendita } i \text{ è assegnato al magazzino } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Introduciamo inoltre km variabili binarie per stabilire la capacità dei magazzini:

$$y_{jh} = \begin{cases} 1, & \text{se il magazzino } j \text{ viene aperto con capacità } u_h, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m, \quad h = 1, 2, \dots, k.$$

I seguenti vincoli, di semiassegnamento, garantiscono che ogni punto vendita sia assegnato a esattamente un magazzino:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

I vincoli di capacità relativi ai magazzini possono essere formulati mediante le seguenti due famiglie di vincoli:

$$\sum_{i=1}^n d_i x_{ij} \leq \sum_{h=1}^k u_h y_{jh}, \quad j = 1, \dots, m.$$

$$\sum_{h=1}^k y_{jh} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Si osservi che la decisione di non aprire il magazzino j corrisponde alla scelta $y_{jh} = 0$, $h = 1, 2, \dots, k$. Se invece $\sum_{h=1}^k y_{jh} = 1$, l'espressione $\sum_{h=1}^k u_h y_{jh}$ nella prima famiglia di vincoli individua la capacità scelta per il magazzino j . La prima famiglia di vincoli svolge pure il ruolo di collegamento (linking) tra le decisioni di attivazione dei magazzini e le decisioni di assegnamento: se $\sum_{h=1}^k y_{jh} = 0$, ovvero il magazzino j non viene aperto, non è possibile assegnare nessun punto vendita a j .

Il problema può quindi essere formulato mediante il seguente modello *PLI*:

$$\min \quad \sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^k f_{jh} y_{jh} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{h=1}^k y_{jh} \leq 1 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^n d_i x_{ij} \leq \sum_{h=1}^k u_h y_{jh} \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

$$y_{jh} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, m \quad h = 1, 2, \dots, k$$