RICERCA OPERATIVA (a.a. 2025/26)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il problema di *PL* riportato a lato, parametrico in ε: i) si individui l'insieme di tutti i valori di ε per cui la base $B = \{3, 4\}$ è ottima; ii) si risolva il problema dato, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$, per $\varepsilon = 2$, utilizzando l'algoritmo del Simplesso appropriato; in caso di ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima primale e della soluzione ottima duale determinate dall'algoritmo. Giustificare algebricamente le risposte date.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & (1-\varepsilon)x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & \varepsilon \end{array}$$

SVOLGIMENTO

i) Considerando la base $B = \{3, 4\}$, si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ x(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 2 \end{bmatrix},\ y_B(\varepsilon)^T = \begin{bmatrix} (1-\varepsilon) & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (1-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

La soluzione di base primale è ammissibile per tutti i valori di ε per cui $x(\varepsilon)$ soddisfa i due vincoli fuori base, ovvero:

$$\varepsilon - 2 \leq 0 \quad , \quad -\varepsilon - 2 \leq 0 \quad \equiv \quad \varepsilon \in [-2, 2] \ .$$

La soluzione di base duale è invece ammissibile per tutti i valori di ε per cui le componenti di $y_B(\varepsilon)$ sono non negative, ovvero:

$$1 - \varepsilon \geq 0 \quad \equiv \quad \varepsilon \leq 1 \ .$$

Combinando i due risultati, segue che $B = \{3, 4\}$ è una base ottima per $\varepsilon \in [-2, 1]$.

ii) Per $\varepsilon = 2$, la base $B = \{3, 4\}$ è primale ammissibile ma non più duale ammissibile, come risulta dall'analisi precedente. È quindi possibile risolvere il problema dato mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire da $B = \{3, 4\}$.

it.1) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{2\} \ ,$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = \lambda_2 = 4 \ , \ k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 2$$

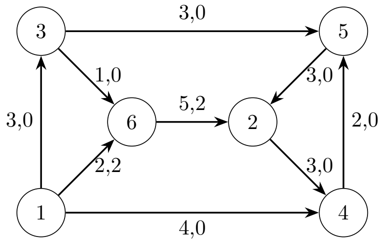
it.2) $B = \{2, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale non degenere, soluzione di base duale non degenere]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (-2, 2)$ è una soluzione ottima per il problema dato nel caso in cui $\varepsilon = 2$, mentre $y = (0, 1, 2, 0)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. Poiché sia la soluzione ottima primale che quella duale sono non degeneri, $x = (-2, 2)$ e $y = (0, 1, 2, 0)$ sono le uniche soluzioni ottime del primale e del duale, rispettivamente.

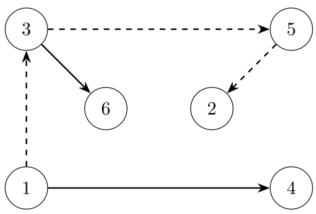
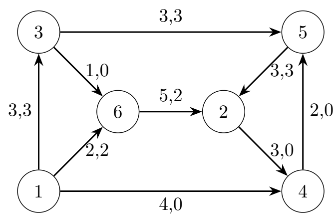
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 2 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore 2. Durante la ricerca di un cammino aumentante si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l'ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, $(1, 2)$ è visitato prima di $(1, 3)$). Per ogni iterazione si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Si discuta, infine, quale sarebbe il valore del flusso massimo nel caso in cui la capacità dell'arco $(6, 2)$ fosse un parametro reale $\alpha > 0$.



SVOLGIMENTO

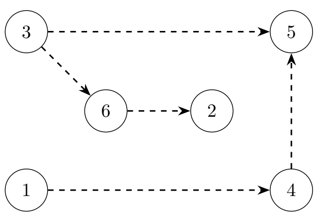
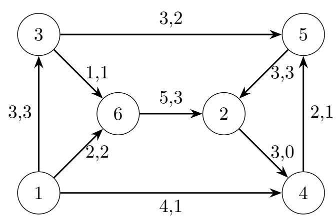
Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato (linee tratteggiate). Viene inoltre riportato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità del cammino aumentante.

Iterazione 1:

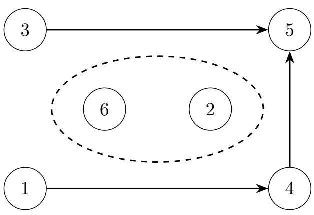
$\theta(P, x) = 3, \quad v = 5$

Iterazione 2:

$\theta(P, x) = 1, \quad v = 6$

Iterazione 3:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo.
Inoltre, il taglio individuato dall'algoritmo, definito da $N_s = \{1, 3, 4, 5\}$ e $N_t = \{2, 6\}$, è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{16} + u_{36} + u_{52} = 2 + 1 + 3 = 6 = v$.

Se la capacità dell'arco $(6, 2)$ fosse $\alpha \geq 3$, il flusso individuato dall'algoritmo continuerebbe a essere ammissibile. Pertanto, non esistendo cammini aumentanti dalla sorgente al pozzo, continuerebbe a essere un flusso massimo. Il valore del flusso massimo sarebbe quindi invariato, ovvero uguale a 6. Per $0 < \alpha < 3$, invece, un taglio di capacità minima sarebbe il taglio che separa l'insieme dei nodi $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ dal nodo 2, di capacità $3 + \alpha$. Si osservi che l'arco $(6, 2)$ è un arco diretto di tale taglio. Pertanto, per $0 < \alpha < 3$ il valore del flusso massimo sarebbe pari a $3 + \alpha$.

3) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max & 10x_1 & +11x_2 & +14x_3 & +26x_4 & +5x_5 & & \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +7x_4 & +2x_5 & \leq & 9 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Al termine, si proponga un piano di taglio di tipo *cover* per il problema dato.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottima del rilassamento continuo e con $\bar{x}$ la soluzione restituita dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate secondo l'ordine CUD.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice: $x^* = [1, 1, 1, 3/7, 0]$, $\bar{z} = 46$ (previo arrotondamento alla parte intera inferiore), $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 40$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 40$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$x_4 = 0$: $x^* = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 40 = \underline{z}$. Poiché $\bar{z} = \underline{z}$, il nodo chiuso viene chiuso per ottimalità.

$x_4 = 1$: $x^* = [1, 1/2, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 41$ (previo arrotondamento alla parte intera inferiore), $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 0]$, $\underline{z} = 36$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$x_4 = 1$, $x_2 = 0$: $x^* = [1, 0, 1/3, 1, 0]$, $\bar{z} = 40$ (previo arrotondamento alla parte intera inferiore). Poiché $\bar{z} = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_4 = 1$, $x_2 = 1$: $x^* = [0, 1, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 37 = \underline{z}$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore (o per ottimalità).

L'algoritmo termina in quanto Q è vuota. La soluzione ottima determinata è $[1, 1, 1, 0, 1]$, di valore 40.

Un piano di taglio di tipo *cover* è dato dalla disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$. Infatti: 1) è una disuguaglianza valida, ovvero è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato (gli oggetti 3 e 4 non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino); 2) è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (infatti $1 + 3/7 > 1$).