

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)**Nome:****Cognome:****Matricola:**1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rcll}
\max & 2x_1 & - & 8x_2 \\
& x_1 & - & x_2 \leq -2 \\
& x_1 & & \leq 4 \\
& & x_2 & \leq 6 \\
& -2x_1 & + & x_2 \leq -1 \\
& -x_1 & + & x_2 \leq 2
\end{array}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del Simplexso Primale, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica. Si determini inoltre l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

$$\text{it.1) } B = \{2, 3\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = [2 \quad -8] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad -8], \quad y^T = [0 \quad 2 \quad -8 \quad 0 \quad 0]$$

[soluzione di base primale degenera, soluzione di base duale non degenera] $h = 3$, $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{1\},$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\lambda_i : i \in J\} = \lambda_1 = 0, \quad k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 1$$

[cambio di base degenera]

$$\text{it.2) } B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y_B^T = [2 \quad -8] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [8 \quad -6], \quad y^T = [8 \quad -6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

[soluzione di base primale degenera, soluzione di base duale non degenera] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J = \{4\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_4 = 1, \quad k = 4$$

$$\text{it.3) } B = \{1, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y_B^T = [2 \quad -8] \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = [14 \quad 6], \quad y^T = [14 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 0], \quad \text{STOP.}$$

[soluzione di base primale degenera, soluzione di base duale non degenera]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (3, 5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (14, 0, 0, 6, 0)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenera, segue che $x = (3, 5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale.

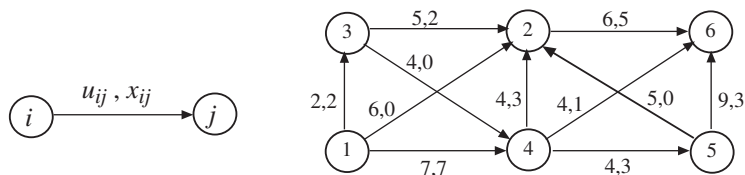
Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (3, 5)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $x = (3, 5)$ è $I(x) = \{1, 4, 5\}$. Di conseguenza una soluzione duale y , tale che $y^T A = c^T$, che formi con x una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_2 = y_3 = 0$. Affinché y sia ammissibile per (D) , essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

$$\begin{cases}
y_1 - 2y_4 - y_5 = 2 \\
-y_1 + y_4 + y_5 = -8 \\
y_1, y_4, y_5 \geq 0
\end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(14 + \alpha, 6, \alpha)$, per $\alpha \geq 0$. Pertanto, le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni aventi forma $y(\alpha) = (14 + \alpha, 0, 0, 6, \alpha)$, per $\alpha \geq 0$.

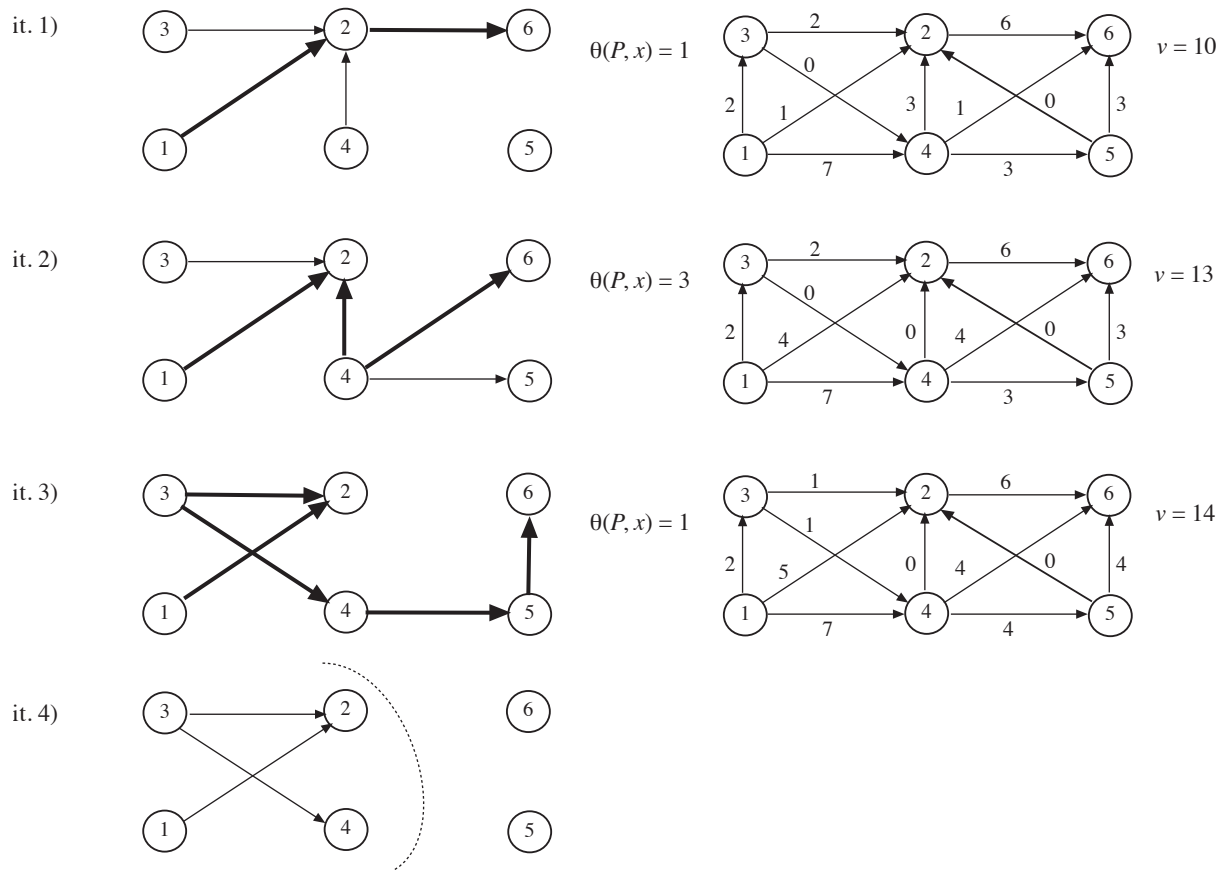
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, $(1,2)$ è visitato prima di $(1,3)$). Per ogni iterazione si specifichi l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità.

Si discuta infine quale sarebbe la minima capacità dei tagli che separano la sorgente dal pozzo nel caso in cui l'arco $(2,6)$ avesse capacità $u_{26} = 5$. Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono illustrate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati). A destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio della quantità $\theta(P, x)$ lungo P , con il relativo valore v . Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{45} + u_{46} = 6 + 4 + 4 = 14 = v$.



Nella configurazione corrente della rete di flusso, $(2,6)$ è un arco diretto di un taglio di capacità minima. Poiché, sempre facendo riferimento alla configurazione corrente, la minima capacità dei tagli che separano la sorgente dal pozzo è pari a 14, se l'arco $(2,6)$ avesse capacità 5 invece di 6 la minima capacità dei tagli che separano la sorgente dal pozzo diventerebbe pari a 13.

3) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{rcccccl} \max & 3x_1 & +x_2 & +6x_3 & +8x_4 & +10x_5 & \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottima del rilassamento continuo e con $\bar{x}$ la soluzione restituita dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: x_5, x_4, x_3, x_1, x_2 .

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice: $x^* = [0, 0, 1/2, 1, 1]$, $\bar{z} = 21$, $\bar{x} = [0, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 19$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3 .

$x_3 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1/2, 1]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [0, 1, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4 .

$x_3 = 0$: $x^* = [1/2, 0, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 19 + 1/2$, $\bar{x} = [0, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché i costi sono interi, una valutazione superiore più accurata è 19. Pertanto, poiché $\bar{z} = z$, il nodo può essere chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1, x_4 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1, 1/2]$, $\bar{z} = 19$, $\bar{x} = [0, 1, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\bar{z} = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1, x_4 = 0$: $x^* = [1/2, 0, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 17 + 1/2$, $\bar{x} = [0, 1, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

L'algoritmo termina in quanto Q è vuota. La soluzione ottima determinata è $[0, 1, 0, 1, 1]$, di valore 19.