RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -3x_1 & + & 3x_2 & & \\ & & & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si indichi quindi se la soluzione ottima primale individuata continuerebbe a essere ottima nel caso in cui il costo della variabile x_1 valesse +3 invece di -3, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = 4,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\} = 3/2,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = 1.$$

it. 2) $B = \{2, 4\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 9/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 9, \quad h = 2.$$

it. 3) $B = \{3, 4\}$: $\quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

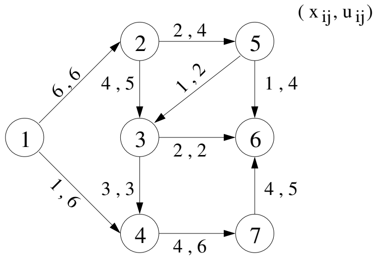
Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, la base $B = \{3, 4\}$ è ottima. La soluzione $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ è ottima per il primale, mentre la soluzione $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ è ottima per il duale.

Se il costo della variabile x_1 fosse +3 invece di -3, la soluzione di base primale $\bar{x} = [3, -1]$ continuerebbe a essere ammissibile. Tuttavia, la base $B = \{3, 4\}$ non sarebbe più duale ammissibile in quanto

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, essendo $\bar{x} = [3, -1]$ una soluzione di base primale non degenere, $\bar{x} = [3, -1]$ non sarebbe una soluzione ottima per il problema modificato.

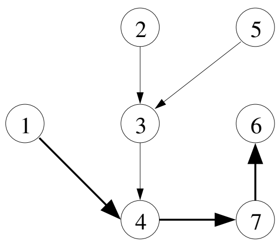
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 7$. Per ogni iterazione si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Alla fine, si discuta quale sarebbe il valore di flusso massimo nel caso in cui sia il nodo 1 che il nodo 7 fossero sorgenti di flusso (il nodo 6 continuerebbe a essere l'unico nodo destinazione, come nello scenario precedente), motivando la risposta.

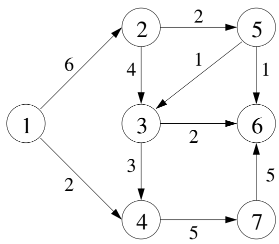


SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

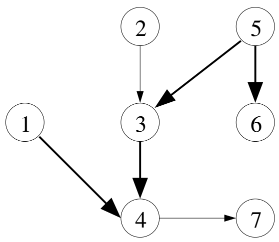
Iterazione 1:

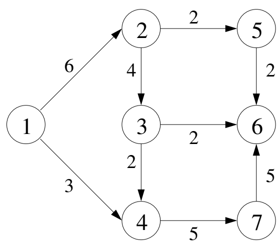




$\theta(P, x) = 1, \quad v = 8$

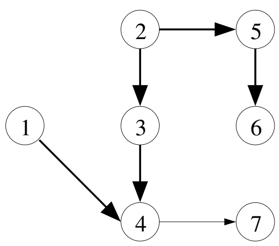
Iterazione 2:

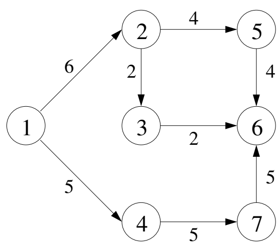




$\theta(P, x) = 1, \quad v = 9$

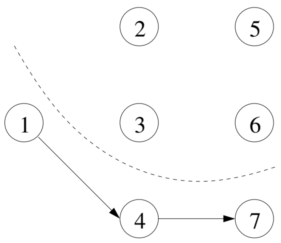
Iterazione 3:





$\theta(P, x) = 2, \quad v = 11$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed inoltre il taglio $N_s = \{1, 4, 7\}$, $N_t = \{2, 3, 5, 6\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{76} = 6 + 5 = 11 = v$.

Se sia il nodo 1 che il nodo 7 fossero sorgenti di flusso, il valore massimo di flusso sarebbe invariato, ovvero pari a 11. Il taglio ($N_s = \{1, 4, 7\}$, $N_t = \{2, 3, 5, 6\}$), infatti, che separa le sorgenti 1 e 7 dal nodo destinazione 6, risulta saturo: non è quindi possibile inviare più di 11 unità di flusso dai nodi 1 e 7 verso il nodo 6.

3) L'azienda *Online-Fashion* deve organizzare la spedizione di merce dal proprio deposito centrale verso i clienti che hanno effettuato ordini online. Sia $G = (N, A)$ il grafo orientato che descrive la rete dei collegamenti utilizzabili per la spedizione. Il deposito centrale è localizzato nel nodo 1, mentre i siti cliente corrispondono ai rimanenti $n - 1$ nodi della rete, con $|N| = n$. Sia d_i il numero di pacchi richiesti dal cliente i, $i = 2, \ldots, n$. Sia inoltre u_{ij} la massima quantità di pacchi inviabili lungo il collegamento $(i, j) \in A$. I manager dell'azienda decidono di effettuare la spedizione utilizzando al più K collegamenti, con K parametro derivante da un'analisi dei dati dell'azienda, e indicano la propria preferenza riguardo i collegamenti da utilizzare per la spedizione. Specificatamente, p_{ij} denota la preferenza derivante dall'utilizzo del collegamento (i, j).

Si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere quale sottoinsieme di al più K collegamenti utilizzare per effettuare la spedizione dal deposito centrale, e come organizzare la spedizione, in modo tale da soddisfare le richieste dei clienti e rispettare i vincoli di capacità associati ai collegamenti, con l'obiettivo di massimizzare la preferenza totale derivante dai collegamenti utilizzati (la preferenza totale è la somma delle preferenze associate ai singoli collegamenti utilizzati).

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili di flusso x_{ij}, che indicano la quantità di pacchi spediti lungo il collegamento $(i, j) \in A$. Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se viene utilizzato il collegamento } (i,j) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i, j) \in A.$$

Il problema può essere formulato come segue:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} p_{ij} y_{ij} & \\ & \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = d_i & i = 2, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} \le K & \\ & 0 \le x_{ij} \le u_{ij} y_{ij} & (i,j) \in A \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} & (i,j) \in A \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli garantisce il soddisfacimento della domanda dei clienti. Si noti che l'analogo vincolo di conservazione di flusso relativo al nodo deposito centrale è omesso, in quanto linearmente dipendente dai vincoli di conservazione di flusso relativi ai nodi cliente. Il vincolo successivo garantisce che vengano utilizzati al più K collegamenti per effettuare la spedizione. Il penultimo blocco di vincoli assicura che solo i collegamenti selezionati possano essere utilizzati per la spedizione, fino alla relativa massima capacità. Infine, la funzione obiettivo, da massimizzare, rappresenta la preferenza totale derivante dai collegamenti utilizzati.