RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & + & 6x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & - & x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

Utilizzando il Lemma di Farkas, si verifichi se la soluzione $\bar{x} = (0, 5)$ sia ottima. In caso negativo, si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

La soluzione $\bar{x} = (0, 5)$ è ammissibile e l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = I = \{1, 2\}$. Per il Lemma di Farkas, i sistemi

$$(PR): \left\{ \begin{array}{ll} A_I\xi & \leq 0 \\ c^T\xi & > 0 \end{array} \right. \qquad (DR): \left\{ \begin{array}{r} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{array} \right.$$

sono mutuamente esclusivi, ossia (PR) ammette soluzione se e solo se non la ammette (DR). Per il problema in esame, la sottomatrice di A relativa ai soli vincoli attivi è

$$A_I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi si ha

$$(PR): \left\{ \begin{array}{rcrl} -\xi_1 & + & \xi_2 & \leq 0 \\ -\xi_1 & & & \leq 0 \\ 2\xi_1 & + & 6\xi_2 & > 0 \end{array} \right. \qquad (DR): \left\{ \begin{array}{rcrl} -y_1 & - & y_2 & = 2 \\ y_1 & & & = 6 \\ y_1 & , & y_2 & \geq 0. \end{array} \right.$$

La soluzione $\bar{x}$ è ottima se e solo se (PR) non ammette soluzione, ovvero se e solo se (DR) ha soluzione. Il sistema (DR) non ha soluzione in quanto l'unica soluzione del sistema di equazioni è $\bar{y}_1 = 6$, $\bar{y}_2 = -8$, che non soddisfa i vincoli di non negatività. Quindi, $\bar{x} = (0, 5)$ non è soluzione ottima.

Essendo A_I invertibile, una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$ è data da:

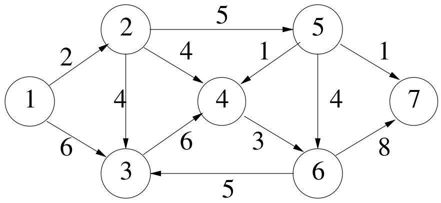
$$\xi = -A_I^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti, essendo

$$A_I\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ha che ξ è una direzione ammissibile per $\bar{x}$. Inoltre $c^T\xi = -\bar{y}_2 = 8 > 0$, e quindi ξ è anche una direzione di crescita.

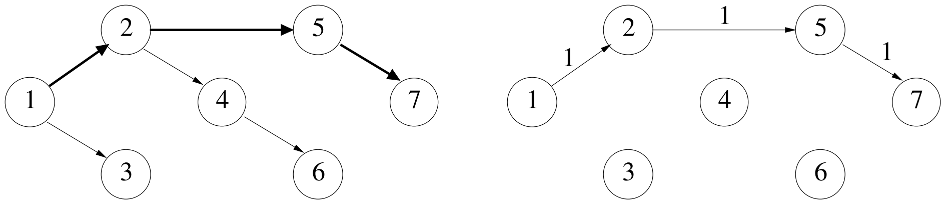
2) Data la rete in figura, si individui un taglio di capacità minima che separa il nodo 1 dal nodo 7. Si specifichi l'algoritmo utilizzato per tale individuazione, giustificando la scelta effettuata (nota: non è consentita un'enumerazione esaustiva dei tagli del grafo al fine di individuarne uno di minima capacità). Si descriva inoltre, in modo dettagliato, ogni iterazione dell'algoritmo utilizzato.



SVOLGIMENTO

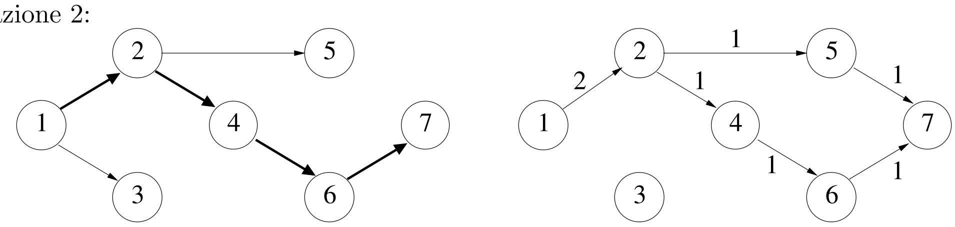
Grazie alla teoria della dualità della Programmazione Lineare, un taglio di capacità minima che separi il nodo 1 dal nodo 7 può essere individuato calcolando un flusso massimo, dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura. Si procederà pertanto a tale individuazione utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp, ovvero l'unico algoritmo per l'individuazione di un flusso massimo presentato durante il corso. Nel seguito, per ogni iterazione dell'algoritmo vengono riportati l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore (omettendo gli archi con flusso nullo).

Iterazione 1:



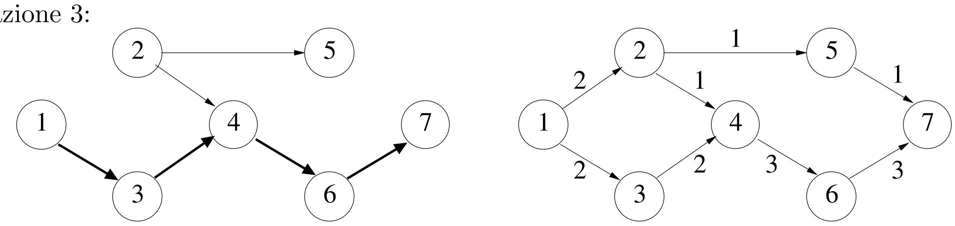
$P = (1, 2, 5, 7)$,
$\theta(P, x) = 1$, $v = 1$

Iterazione 2:



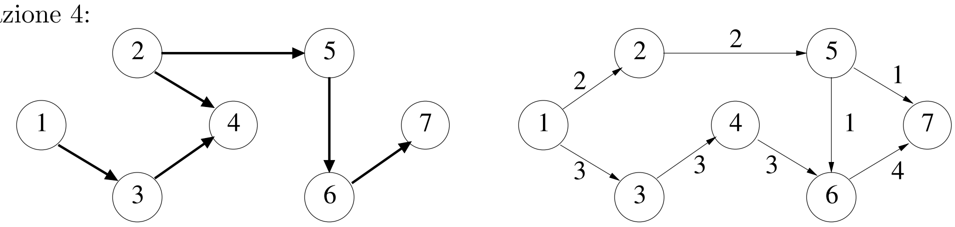
$P = (1, 2, 4, 6, 7)$,
$\theta(P, x) = 1$, $v = 2$

Iterazione 3:



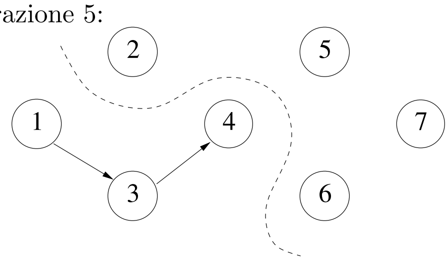
$P = (1, 3, 4, 6, 7)$,
$\theta(P, x) = 2$, $v = 4$

Iterazione 4:



$P = (1, 3, 4, 2, 5, 6, 7)$,
$\theta(P, x) = 1$, $v = 5$

Iterazione 5:



Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato, di valore $v = 5$, è massimo, e $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è un taglio di capacità minima che separa il nodo 1 dal nodo 7: $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{46} = 2 + 3 = 5$.

3) Sia $G = (N, A)$ il grafo orientato che descrive la rete logistica dell'azienda SENDLOG. Attraverso tale rete, l'azienda vuole inviare una certa tipologia di prodotto al nodo $t \in N$, dove è situato un cliente. A tale fine, SENDLOG decide di aprire alcuni magazzini, e di inviare il prodotto da tali magazzini verso il nodo cliente. Sia $C \subset N \setminus \{t\}$ il sottoinsieme di nodi della rete candidati per l'apertura di un magazzino, e sia b_i il massimo numero di unità di prodotto che il magazzino in i, se aperto, è in grado di inviare al nodo t, per ogni $i \in C$. Sia inoltre u_{ij} il massimo numero di unità di prodotto inviabili lungo l'arco $(i, j) \in A$.

Per contenere i costi di investimento, SENDLOG decide di aprire magazzini in non più di metà dei nodi candidati (cioè nodi appartenenti all'insieme C). Si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere in quali nodi in C aprire un magazzino, rispettando il vincolo di cardinalità sopra indicato, e quante unità di prodotto inviare dai magazzini aperti al nodo t lungo la rete, tenendo conto delle capacità degli archi di G, in modo tale da massimizzare il numero di unità di prodotto inviate al nodo t.

SVOLGIMENTO

Per formulare il problema introduciamo le variabili di flusso x_{ij}, che indicano il numero di unità di prodotto inviate lungo l'arco $(i, j) \in A$. Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se viene aperto un magazzino in } i \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i \in C,$$

e variabili s_i, $i \in C$, che indicano il numero di unità di prodotto inviate da i a t ($s_i = 0$ se in $i \in C$ non viene aperto un magazzino).

Il problema di SENDGLOG può essere formulato come segue:

$$\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{i \in C} s_i & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -s_i & \text{se } i \in C, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N \setminus \{t\} \\
& \displaystyle\sum_{i \in C} y_i \leq |C|/2 & \\
& 0 \leq s_i \leq b_i y_i & i \in C \\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} & (i, j) \in A \\
& y_i \in \{0, 1\} & i \in C
\end{array}$$

Il primo blocco di vincoli descrive la conservazione del flusso attraverso la rete: i nodi in corrispondenza dei quali viene aperto un magazzino si comportano come nodi sorgente (s_i indica il numero di unità di prodotto immesse nella rete dal nodo i), mentre tutti gli altri nodi, a eccezione del nodo destinazione t, si comportano come nodi di trasferimento. Il secondo blocco di vincoli garantisce che vengano aperti magazzini in non più di metà dei nodi candidati. Il terzo blocco di vincoli assicura che solo i magazzini attivati possano inviare unità del prodotto, fino alla relativa massima capacità, mentre quelli del quarto blocco sono i vincoli di capacità relativi agli archi della rete. Infine la funzione obiettivo, da massimizzare, rappresenta il numero di unità di prodotto che si riesce a far pervenire al nodo cliente.