Semantica denotazionale dei commandi

Lambda notation

Lambda notazione

Ingredienti base:

funzioni anonime

$\lambda x.\ e$ $\quad x$ funge da parametro formale in e

denota una funzione che aspetta un valore da sostituire a x e poi valuta e

applicazione

$e_1\ e_2$ $\quad e_2$ è l'argomento passato alla funzione e_1

denota l'applicazione della funzione e_1 a e_2

riduce il bisogno di parentesi $e_1(e_2)$

Definizione di funzione

$$f(x) \triangleq x^2 - 2 \cdot x + 5$$

$$f \triangleq \lambda x.\ (x^2 - 2 \cdot x + 5)$$

le parentesi non sono necessarie
vengono aggiunte per chiarezza

Associative rules

$e_1 \ e_2 \ e_3$ si legge $(e_1 \ e_2) \ e_3$ l'applicazione è associativa a sinistra

$\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ e$ si legge $\lambda x.\ (\lambda y.\ (\lambda z.\ e))$ l'astrazione è associativa a destra

Scoping (ambito di visibilità)

$$\lambda x.\ e$$

lo scope di x è e

x non è visibile fuori da e

come una variabile locale

Alpha-conversione

$$\lambda x.\ (x^2 - 2 \cdot x + 5)$$

I nomi dei parametri formali sono inessenziali: le due espressioni denotano la stessa funzione.

$$\lambda y.\ (y^2 - 2 \cdot y + 5)$$

$\lambda x.\ e \equiv \lambda y.\ (e[^y/_x])$ (sotto opportune condizioni su e, y)

sostituzione capture-avoiding

(lo formalizzeremo poi)

Applicazione (regole beta)

$(\lambda x.\ e)\ e_0$ applicazione di una funzione

$\equiv$

$e[^{e_0}/_{x}]$ valutazione con sostituzione

sostituzione capture-avoiding

Esempio

$\lambda x.\ (x^2 - 2 \cdot x + 5)$ una funzione

$(\lambda x.\ (x^2 - 2 \cdot x + 5))\ 2$ l'applicazione

$$\equiv$$

$2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 5$ la sua valutazione

Esempio

$\lambda x.\ \lambda y.\ (x^2 - 2 \cdot y + 5)$ una funzione

$(\lambda x.\ \lambda y.\ (x^2 - 2 \cdot y + 5))\ 2$ l'applicazione

$$\equiv$$

$\lambda y.\ (2^2 - 2 \cdot y + 5)$ la sua valutazione

e' ancora una funzione!

Esempio

$\lambda f.\ \lambda x.\ (x^2 + f\ 1)$ una funzione

$(\lambda f.\ \lambda x.\ (x^2 + f\ 1))\ (\lambda y.\ (2 \cdot y))$ l'applicazione

$\equiv$ (l'argomento è una funzione!)

$\lambda x.\ (x^2 + (\lambda y.\ (2 \cdot y))\ 1)$ la sua valutazione

di ordine superiore: funzioni come argomenti o risultati

Esempio

$$\lambda f.\ \lambda x.\ (x^2 + f\ 1)$$

una funzione

$$(\lambda f.\ \lambda x.\ (x^2 + f\ 1))\ (\lambda y.\ (2 \cdot y))\ \ 3$$

l'applicazione

$$\equiv$$

$$\lambda x.\ (x^2 + (\lambda y.\ (2 \cdot y))\ 1) \qquad 3$$

la sua valutazione
l'applicazione

$$\equiv$$

la sua valutazione

$$3^2 + (\lambda y.\ (2 \cdot y))\ 1$$

l'applicazione

$$\equiv$$

$$3^2 + 2 \cdot 1 = 11$$

la sua valutazione

Condizionale

$e \to e_1, e_2$ if e then e_1 else e_2

esempio $\mathrm{min} \triangleq \lambda x.\ \lambda y.\ x < y \to x, y$

Dalla ricorsione al punto fisso

$$fact\ n = (n < 2) \to 1\,, n \cdot fact(n-1)$$

$$fact = \lambda n\,.\,(n < 2) \to 1\,, n \cdot fact(n-1)$$

$$fact = (\lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \to 1\,, n \cdot f(n-1))\ fact$$

$$\Gamma = \lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \to 1\,, n \cdot f(n-1)$$

$$fact = \Gamma(fact)$$

$$fact = \mathsf{fix}\ \Gamma$$

Dalla ricorsione al punto fisso

$$\Gamma = \lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\, n \cdot f(n-1)$$

$$id = \lambda x\,.\,x$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\ id &= (\lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\, n \cdot f(n-1))\ id \\
&= \lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\, n \cdot id(n-1) \\
&= \lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\, n \cdot (n-1) \\
&\neq id
\end{aligned}$$

Dalla ricorsione al punto fisso

$$\Gamma = \lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\,n \cdot f(n-1)$$

$$succ = \lambda x\,.\,x + 1$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\ succ &= (\lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\,n \cdot f(n-1))\ succ \\
&= \lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\,n \cdot succ(n-1) \\
&= \lambda n\,.\,(n < 2) \rightarrow 1\,,\,n \cdot n \\
&\neq succ
\end{aligned}$$

Dalla ricorsione al punto fisso

$$\Gamma = \lambda f \,.\, \lambda n \,.\, (n < 2) \rightarrow 1 \,, n \cdot f(n-1)$$

$$square = \lambda x \,.\, x^2$$

$$\begin{aligned} \Gamma\ square &= (\lambda f \,.\, \lambda n \,.\, (n < 2) \rightarrow 1 \,, n \cdot f(n-1))\ square \\ &= \lambda n \,.\, (n < 2) \rightarrow 1 \,, n \cdot square(n-1) \\ &= \lambda n \,.\, (n < 2) \rightarrow 1 \,, n \cdot (n-1)^2 \\ &\neq square \end{aligned}$$

Dalla ricorsione al punto fisso

$$\Gamma = \lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \to 1\,, n \cdot f(n-1)$$

$$fact = \lambda x\,.\,x!$$

$$\begin{aligned}\Gamma\ fact &= (\lambda f\,.\,\lambda n\,.\,(n < 2) \to 1\,, n \cdot f(n-1))\ fact \\ &= \lambda n\,.\,(n < 2) \to 1\,, n \cdot fact(n-1) \\ &= \lambda n\,.\,(n < 2) \to 1\,, n \cdot (n-1)! \\ &= fact\end{aligned}$$

Semantica denotazionale dei commandi

Semantica Denotazionale

$$\mathscr{C} : Com \to (\Sigma \rightharpoonup \Sigma) \qquad \mathscr{C} : Com \to (\Sigma \to \Sigma_\perp)$$

Lifting

$$(\cdot)^* : (\Sigma \to \Sigma_\perp) \to (\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp)$$

$$f : \Sigma \to \Sigma_\perp \qquad f^* : \Sigma_\perp \to \Sigma_\perp$$

$$f^*(x) = \begin{cases} \perp & \text{if } x = \perp \\ f(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathscr{C}\,[\![\mathbf{skip}]\!]\,\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma$$

$$\mathscr{C}\,[\![x := a]\!]\,\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma[^{\mathscr{A}[\![a]\!]\sigma}/_x]$$

$$\mathscr{C}\,[\![c_0; c_1]\!]\,\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{C}\,[\![c_1]\!]^*\,(\mathscr{C}\,[\![c_0]\!]\,\sigma)$$

$$\mathscr{C}\,[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1]\!]\,\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{B}\,[\![b]\!]\,\sigma \to \mathscr{C}\,[\![c_0]\!]\,\sigma, \mathscr{C}\,[\![c_1]\!]\,\sigma$$

$$\mathscr{C}\,[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c]\!]\,\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \ ?$$

Semantica Denotazionale

$$\mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]\,\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{B}\,[\![b]\!]\,\sigma \to \mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]^*\,(\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma)\,,\sigma$$

$$\mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\sigma.\mathscr{B}\,[\![b]\!]\,\sigma \to \mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]^*\,(\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma)\,,\sigma$$

$$\equiv$$

$$(\lambda\varphi.\ \lambda\sigma.\ \mathscr{B}\,[\![b]\!]\,\sigma \to \varphi^*(\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma),\sigma)\ \ \mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]$$

$$\Gamma_{b,c} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\varphi.\ \lambda\sigma.\ \mathscr{B}\,[\![b]\!]\,\sigma \to \varphi^*(\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma),\sigma$$

$$\mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!] = \Gamma_{b,c}\,\mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!]$$

$p = f(p)$ equazione di punto fisso!

Semantica Denotazionale

$$\underbrace{\mathscr{C}\,[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]}_{\Sigma\to\Sigma_\perp} = \Gamma_{b,c}\,\underbrace{\mathscr{C}\,[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]}_{\Sigma\to\Sigma_\perp}$$

$$\mathscr{C} : Com \to (\Sigma \to \Sigma_\perp)$$

$$\Gamma_{b,c} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\lambda\varphi.\ \underbrace{\lambda\sigma.\ \underbrace{\mathscr{B}\,[\![b]\!]\,\sigma \to \varphi^*(\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma), \sigma}_{\Sigma_\perp}}_{\Sigma\to\Sigma_\perp}}_{(\Sigma\to\Sigma_\perp)\to\Sigma\to\Sigma_\perp}$$

$$\varphi : \Sigma \to \Sigma_\perp$$

$$\varphi^* : \Sigma_\perp \to \Sigma_\perp$$

$$\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma : \Sigma_\perp$$

$$\varphi^*(\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma) : \Sigma_\perp$$

$$\Gamma_{b,c} : (\Sigma \to \Sigma_\perp) \to \Sigma \to \Sigma_\perp$$

funzioni parziali

$$\Sigma \rightharpoonup \Sigma$$

insiemi di coppie

$$(\sigma, \sigma')$$

$$\mathrm{CPO}_\perp$$

Monotona e continua

$$\Gamma_{b,c} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\varphi.\ \lambda\sigma.\ \mathscr{B}\,[\![b]\!]\,\sigma \to \varphi^*(\mathscr{C}\,[\![c]\!]\,\sigma), \sigma$$

Prendiamo

$$R_{b,c} = \left\{ \frac{(\sigma'', \sigma')}{(\sigma, \sigma')} \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \wedge \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma = \sigma''\ ,\ \ \frac{}{(\sigma, \sigma)} \mathcal{B}[\![\neg b]\!]\sigma \right\}$$

chiaramente

$\widehat{R}_{b,c} = \Gamma_{b,c}$ vediamo $\Gamma_{b,c}$ come operanti su funzioni parziali

$\widehat{R}_{b,c}$ è (monotona e) continua, e così anche $\Gamma_{b,c}$

$$\mathscr{C}\,[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \text{fix}\ \Gamma_{b,c} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^n_{b,c}(\underbrace{\perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}}_{\lambda\sigma.\ \perp})$$

Bottom

$\Sigma_\perp$ ha un elemento bottom: $\perp$

$\Sigma \to \Sigma_\perp$ ha un elemento bottom: $\lambda\sigma.\ \perp$

per evitare ambiguità

indichiamo l'elemento minimo di un dominio D con $\perp_D$

$\perp_{\Sigma_\perp}$ ha un elemento minimo : $\perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}$

Esempio

$$w = \textbf{while true do skip}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\textbf{true},\textbf{skip}}\varphi\sigma &= \mathscr{B}\,[\![\textbf{true}]\!]\,\sigma \to \varphi^*\left(\mathscr{C}\,[\![\textbf{skip}]\!]\,\sigma\right), \sigma \\
&= \textbf{true} \to \varphi^*\left(\mathscr{C}\,[\![\textbf{skip}]\!]\,\sigma\right), \sigma \\
&= \varphi^*\left(\mathscr{C}\,[\![\textbf{skip}]\!]\,\sigma\right) \\
&= \varphi^*\sigma \\
&= \varphi\sigma
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\textbf{true},\textbf{skip}}\varphi = \varphi$$

$\Gamma_{\textbf{true},\textbf{skip}}$ è la funzione identità
ogni elemento è
un punto fisso

$$\text{fix } \Gamma_{\textbf{true},\textbf{skip}} = \lambda\sigma.\ \perp_{\Sigma_\perp}$$

Esempio

$$w \triangleq \textbf{while } \underbrace{x > 1}_{b} \textbf{ do } \underbrace{x := x - 1}_{c}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{b,c}\ \varphi\ \sigma &= \mathcal{B}[\![x > 1]\!]\sigma \to \varphi^*(\mathcal{C}[\![x := x-1]\!]\sigma), \sigma \\ &= (\sigma(x) > 1) \to \varphi^*(\sigma[^{\sigma(x)-1}/_x]), \sigma\end{aligned}$$

$$\widehat{R}_{b,c} \triangleq \left\{ \quad \frac{}{(\sigma,\sigma)}\ \sigma(x) \leq 1 \quad , \quad \frac{(\sigma'', \sigma')}{(\sigma, \sigma')}\ \sigma(x) > 1 \wedge \sigma'' = \sigma[^{\sigma(x)-1}/_x] \quad \right\}$$

$$\widehat{R}_{b,c} \triangleq \left\{ \quad \frac{}{(\sigma,\sigma)}\ \sigma(x) \leq 1 \quad , \quad \frac{(\sigma[^{\sigma(x)-1}/_x], \sigma')}{(\sigma, \sigma')}\ \sigma(x) > 1 \quad \right\}$$

Esempio

$$w \triangleq \textbf{while } x > 1 \textbf{ do } x := x - 1$$

$$\widehat{R}_{b,c} \triangleq \left\{ \frac{}{(\sigma,\sigma)}\ \sigma(x) \leq 1 \quad , \quad \frac{(\sigma[^{\sigma(x)-1}/_x], \sigma')}{(\sigma,\sigma')}\ \sigma(x) > 1 \right\}$$

$$\widehat{R}^0_{b,c}(\varnothing) = \varnothing$$

$$\widehat{R}^1_{b,c}(\varnothing) = \{(\sigma,\sigma) \mid \sigma(x) \leq 1\}$$

$$\widehat{R}^2_{b,c}(\varnothing) = \widehat{R}^1_{b,c}(\varnothing) \cup \{(\sigma, \sigma[1/x]) \mid \sigma(x) = 2\}$$

$$\widehat{R}^3_{b,c}(\varnothing) = \widehat{R}^2_{b,c}(\varnothing) \cup \{(\sigma, \sigma[1/x]) \mid \sigma(x) = 3\}$$

$$\dots$$

$$\widehat{R}^n_{b,c}(\varnothing) = \{(\sigma,\sigma) \mid \sigma(x) \leq 1\} \cup \{(\sigma, \sigma[1/x]) \mid 1 < \sigma(x) \leq n\}$$

$$\dots$$

$$\mathcal{C}[\![w]\!] = \mathit{fix}(\widehat{R}_{b,c}) = \{(\sigma,\sigma) \mid \sigma(x) \leq 1\} \cup \{(\sigma, \sigma[1/x]) \mid 1 < \sigma(x)\}$$