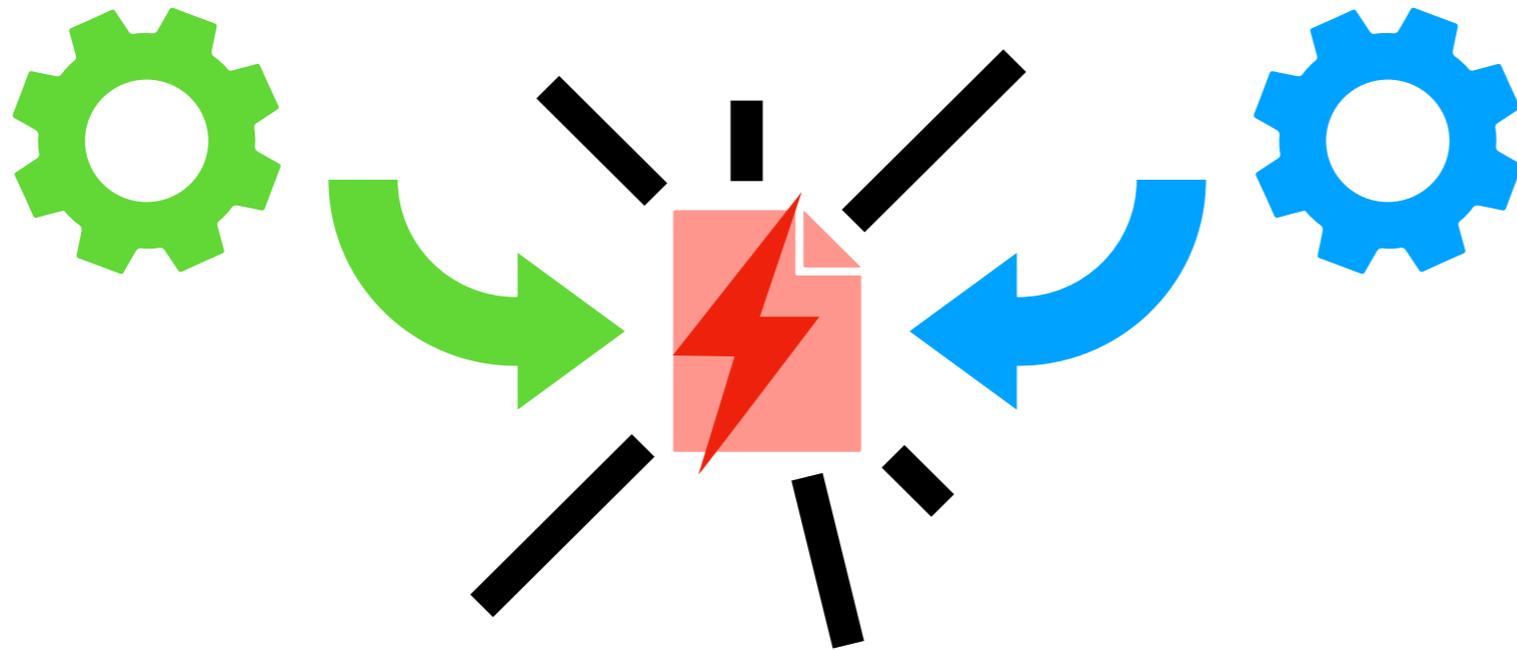


Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

CCS bisimulazione forte-11.4.3-11.5

CCS: sintassi

p, q	$::=$	nil	processo inattivo
		x	variabile di processo (per la ricorsione)
		$\mu.p$	prefisso azione
		$p \setminus \alpha$	canale ristretto
		$p[\phi]$	rietichettatura del canale
		$p + q$	scelta nondeterministica (somma)
		$p q$	composizione parallela
		rec $x. p$	ricorsione

(gli operatori sono elencati in ordine di precedenza)

CCS semantica operativa

$$\begin{array}{c}
 \text{Act)} \frac{}{\mu.p \xrightarrow{\mu} p} \\
 \text{Res)} \frac{p \xrightarrow{\mu} q \quad \mu \notin \{\alpha, \bar{\alpha}\}}{p \setminus \alpha \xrightarrow{\mu} q \setminus \alpha} \\
 \text{Rel)} \frac{p \xrightarrow{\mu} q}{p[\phi] \xrightarrow{\phi(\mu)} q[\phi]} \\
 \\
 \text{SumL)} \frac{p_1 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q} \quad \text{SumR)} \frac{p_2 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q} \\
 \\
 \text{ParL)} \frac{p_1 \xrightarrow{\mu} q_1}{p_1 | p_2 \xrightarrow{\mu} q_1 | p_2} \quad \text{Com)} \frac{p_1 \xrightarrow{\lambda} q_1 \quad p_2 \xrightarrow{\bar{\lambda}} q_2}{p_1 | p_2 \xrightarrow{\tau} q_1 | q_2} \quad \text{ParR)} \frac{p_2 \xrightarrow{\mu} q_2}{p_1 | p_2 \xrightarrow{\mu} p_1 | q_2} \\
 \\
 \text{Rec)} \frac{p[\mathbf{rec} \ x. \ p / x] \xrightarrow{\mu} q}{\mathbf{rec} \ x. \ p \xrightarrow{\mu} q}
 \end{array}$$

Gioco della bisimulazione

Il gioco della bisimulazione

due processi p, q e due giocatori uno contro l'altro

Alice, l'attaccante, mira a dimostrare che p e q non sono equivalenti

Bob, il difensore, mira a dimostrare che p e q sono equivalenti

il gioco è a turni, ad ogni turno:

Alice sceglie un processo e una delle sue transizioni in uscita

Bob deve rispondere con una transizione dell'altro processo equivalente, l'etichetta della transizione scelta deve essere uguale a quella scelta da Alice

al prossimo turno, nel caso ci sia, i giocatori considereranno l'equivalenza dei processi a cui sono arrivati

Il gioco della bisimulazione

Alice vince se, ad un certo punto, lei fa una mossa e Bob non può rispondere con una equivalente

Bob vince in tutti gli altri casi

se Alice non riesce a trovare una mossa
se il gioco non termina

Alice ha una strategia vincente

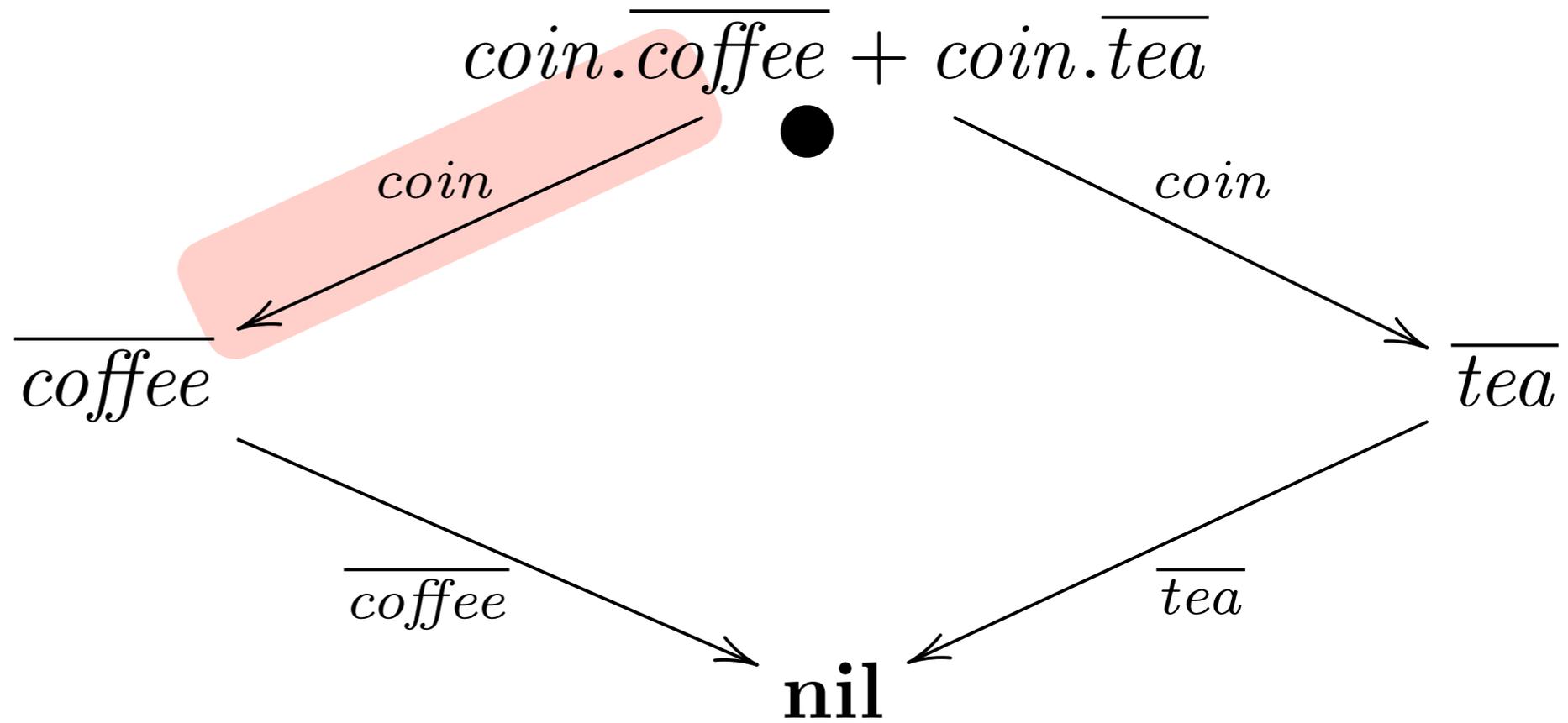
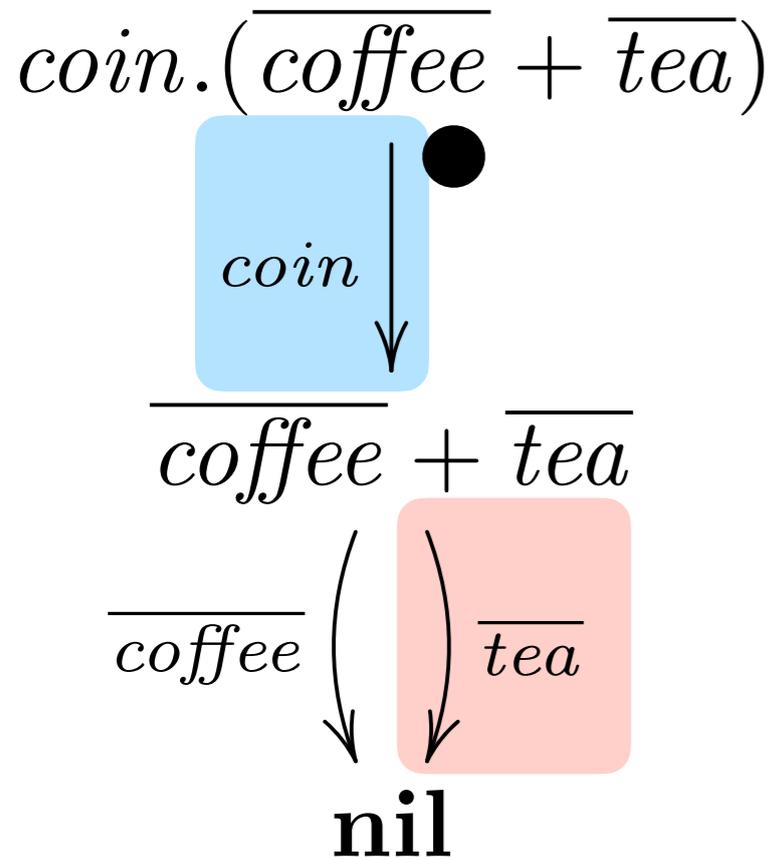
se può fare una mossa che Bob non può fare;

o se può fare una mossa che non importa cosa risponde Bob,
al prossimo turno lei vince

o così via dopo un qualsiasi numero (finito) di mosse...

Alice ha una strategia vincente se può confutare
l'equivalenza di p e q in un numero finito di mosse

Il gioco della bisimulazione



Alice gioca

Bob puo' rispondere

Alice gioca

Bob non puo' rispondere

$$coin.coffee + coin.tea \xrightarrow{coin} coffee$$

$$coin.(coffee + tea) \xrightarrow{coin} coffee + tea$$

$$coffee + tea \xrightarrow{tea} nil$$

$$coffee \not\xrightarrow{tea}$$

Alice vince!

CCS

Strong bisimulation

Bisimulazione forte

la nozione di **bisimulazione** non è limitata ai processi CCS
si applica a qualsiasi LTS

di seguito ricordiamo la definizione originale di Milner di
relazione di bisimulazione forte

da tenere a mente

ci sono molte relazioni di bisimulazione forti

siamo interessati alla più grande relazione di questo tipo,
chiamata *bisimilarità forte*

per dimostrare che due processi sono fortemente bisimili
è sufficiente mostrare che sono legati da una bisimulazione
forte

Bisimulazione forte

\mathcal{P} insieme di processi

$\mathbf{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ una relazione binaria

scriviamo $p \mathbf{R} q$ quando $(p, q) \in \mathbf{R}$

\mathbf{R} e' una bisimulazione forte se

$$\forall p, q. (p, q) \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{cases} \forall \mu, p'. p \xrightarrow{\mu} p' \Rightarrow \exists q'. q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \mathbf{R} q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'. q \xrightarrow{\mu} q' \Rightarrow \exists p'. p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \mathbf{R} q' \end{cases}$$

intuitivamente: se due processi sono in relazione, allora per qualsiasi mossa di Alice, Bob può trovare una mossa che porta a processi in relazione, cioè, Bob ha una strategia vincente

Esempio

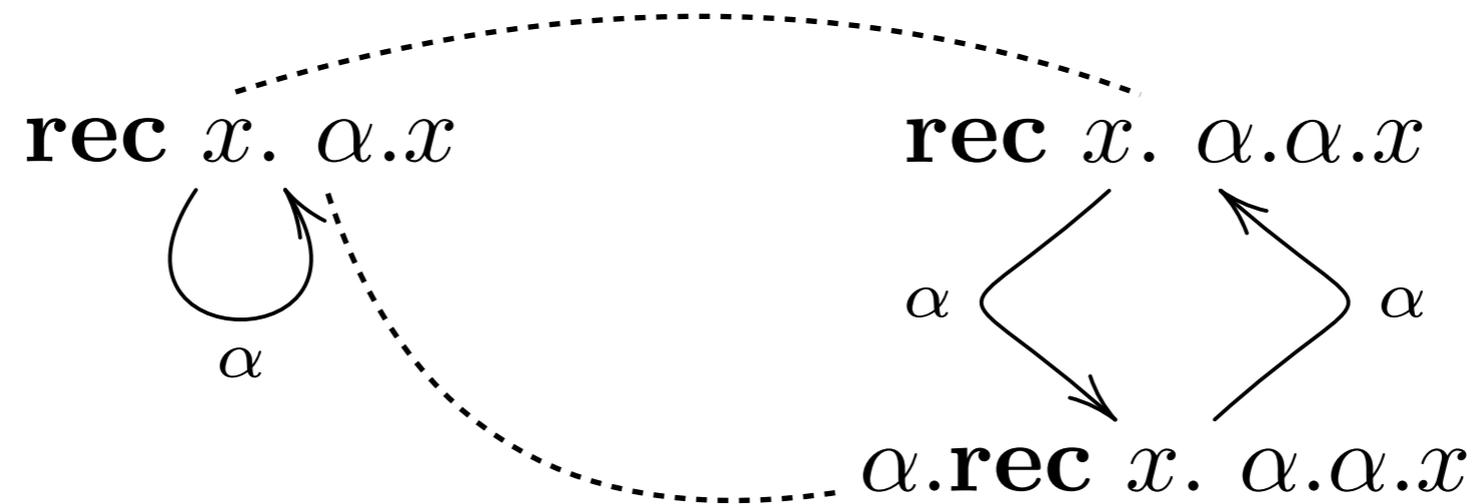
\emptyset e' una bisimulazione forte

$Id \triangleq \{(p, p) \mid p \in \mathcal{P}\}$ e' una bisimulazione forte

ogni isomorfismo tra grafi definisce una bisimulazione forte

$$\mathbf{R}_f \triangleq \{(p, f(p))\}$$

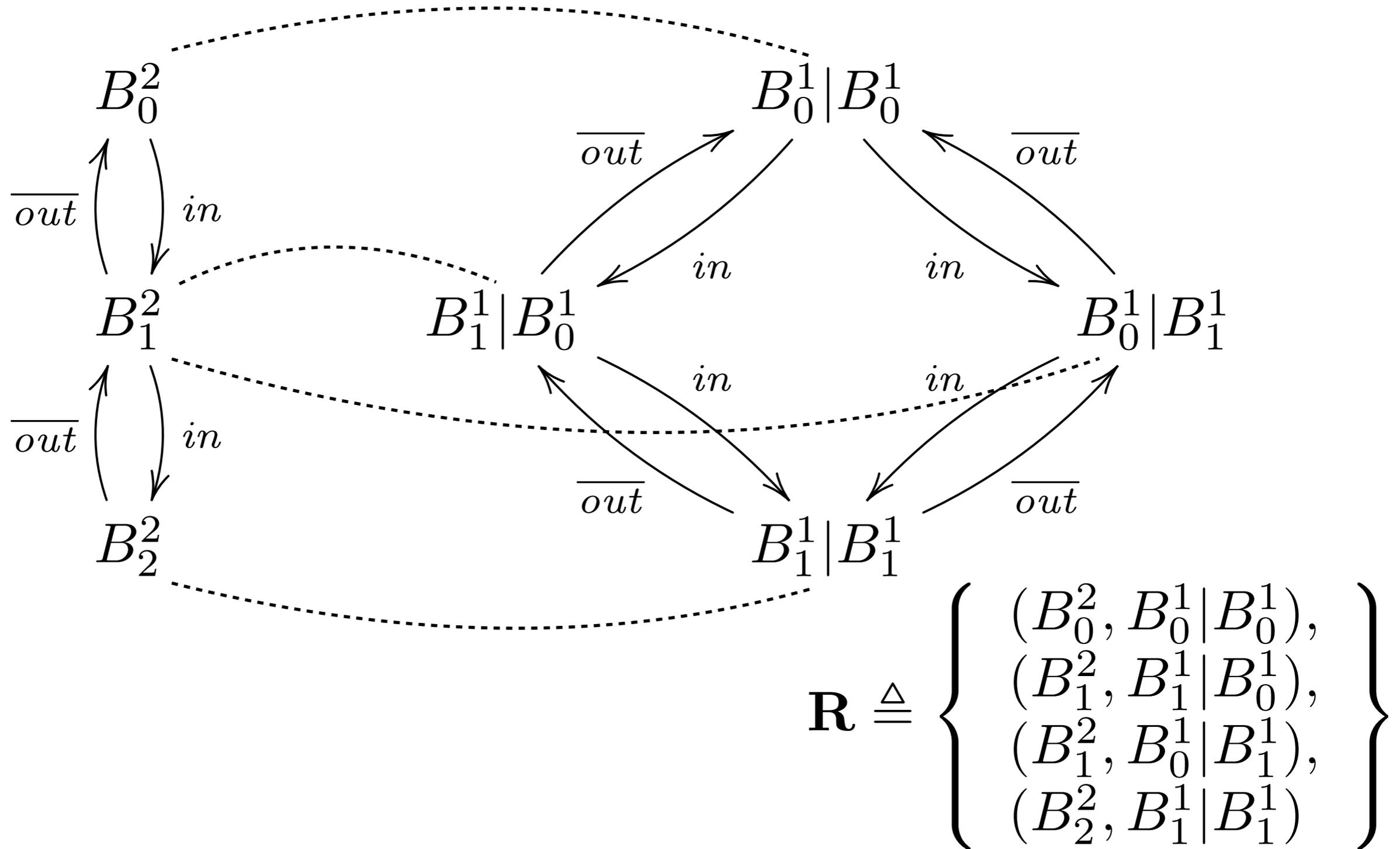
Esempio



$$\mathbf{R} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{rec\ } x. \alpha.x, \mathbf{rec\ } x. \alpha.\alpha.x), \\ (\mathbf{rec\ } x. \alpha.x, \alpha.\mathbf{rec\ } x. \alpha.\alpha.x) \end{array} \right\}$$

a differenza degli isomorfismi tra grafi,
lo stesso processo può essere in relazione con molti processi

Esempio



Unione

Lemma Se \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 sono bisimulazioni forti,
allora $\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$ e' una bisimulazione forte

prova. prendiamo $(p, q) \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$

se $p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$
dal momento che

$(p, q) \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$ abbiamo $p \mathbf{R}_i q$ per qualche $i \in \{1, 2\}$
dal momento che

\mathbf{R}_i e' una bisimulazione forte e $p \xrightarrow{\mu} p'$

abbiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \mathbf{R}_i q'$ e quindi $(p', q') \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$

se $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$

analogo al caso precedente

Inversa

Lemma Se \mathbf{R} e' una bisimulazione forte,
allora $\mathbf{R}^{-1} \triangleq \{(q, p) \mid p \mathbf{R} q\}$ e' una bisimulazione forte.

prova. prendiamo $(q, p) \in \mathbf{R}^{-1}$

se $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $(q', p') \in \mathbf{R}^{-1}$

dal momento che $(q, p) \in \mathbf{R}^{-1}$ abbiamo $p \mathbf{R} q$

dal momento che \mathbf{R} e' una bisimulazione forte e $q \xrightarrow{\mu} q'$

abbiamo $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $p' \mathbf{R} q'$ e per questo $(q', p') \in \mathbf{R}^{-1}$

se $p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(q', p') \in \mathbf{R}^{-1}$

analogo al caso precedente

Composizione

Lemma Se \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 sono bisimulazioni forti,

allora $\mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 \triangleq \{(p, q) \mid \exists r. p \mathbf{R}_1 r \wedge r \mathbf{R}_2 q\}$

e' una bisimulazione forte

prova. prendiamo $(p, q) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$

se $p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$
dal momento che $(p, q) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$ abbiamo $p \mathbf{R}_1 r \wedge r \mathbf{R}_2 q$ per qualche r

dal momento che \mathbf{R}_1 e' una bisimulazione forte e $p \xrightarrow{\mu} p'$

abbiamo $r \xrightarrow{\mu} r'$ con $p' \mathbf{R}_1 r'$

dal momento che \mathbf{R}_2 e' una bisimulazione forte e $r \xrightarrow{\mu} r'$

abbiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $r' \mathbf{R}_2 q'$ e percio' $(p', q') \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$

se $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$

analogo al caso precedente

Notazione

$$\mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 \triangleq \{(p, q) \mid \exists r. p \mathbf{R}_1 r \wedge r \mathbf{R}_2 q\}$$

qualche volta scritto come

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$$

CCS

Bisimilarita' forte

Bisimilarita' forte

\approx

spesso indicato \sim in letteratura

usiamo \approx per sottolineare che è una congruenza

$p \approx q$ sse $\exists \mathbf{R}$ una bisimulazione forte tale che $(p, q) \in \mathbf{R}$

cioè Bob ha una strategia vincente

$\approx \triangleq \bigcup \mathbf{R}$
 \mathbf{R} è una b.f.

la bisimilarità forte è una relazione di equivalenza?

Relazione di equivalenza

≡

Riflessiva

$$\forall p \in \mathcal{P}$$

$$p \equiv p$$

Simmetrica

$$\forall p, q \in \mathcal{P}$$

$$p \equiv q \Rightarrow q \equiv p$$

Transitiva

$$\forall p, q, r \in \mathcal{P}$$

$$p \equiv q \wedge q \equiv r \Rightarrow p \equiv r$$

Equivalenza indotta

Qualsiasi relazione R induce una relazione di equivalenza \equiv_R

\equiv_R è la più piccola equivalenza che contiene R

$$\frac{p \mathbf{R} q}{p \equiv_R q}$$

$$\frac{}{p \equiv_R p}$$

$$\frac{p \equiv_R q}{q \equiv_R p}$$

$$\frac{p \equiv_R q \quad q \equiv_R r}{p \equiv_R r}$$

Lemma se R è una bisimulazione forte,
allora \equiv_R è bisimulazione forte

Partizione indotta

Ogni relazione di equivalenza induce una partizione dei processi in classi di equivalenza

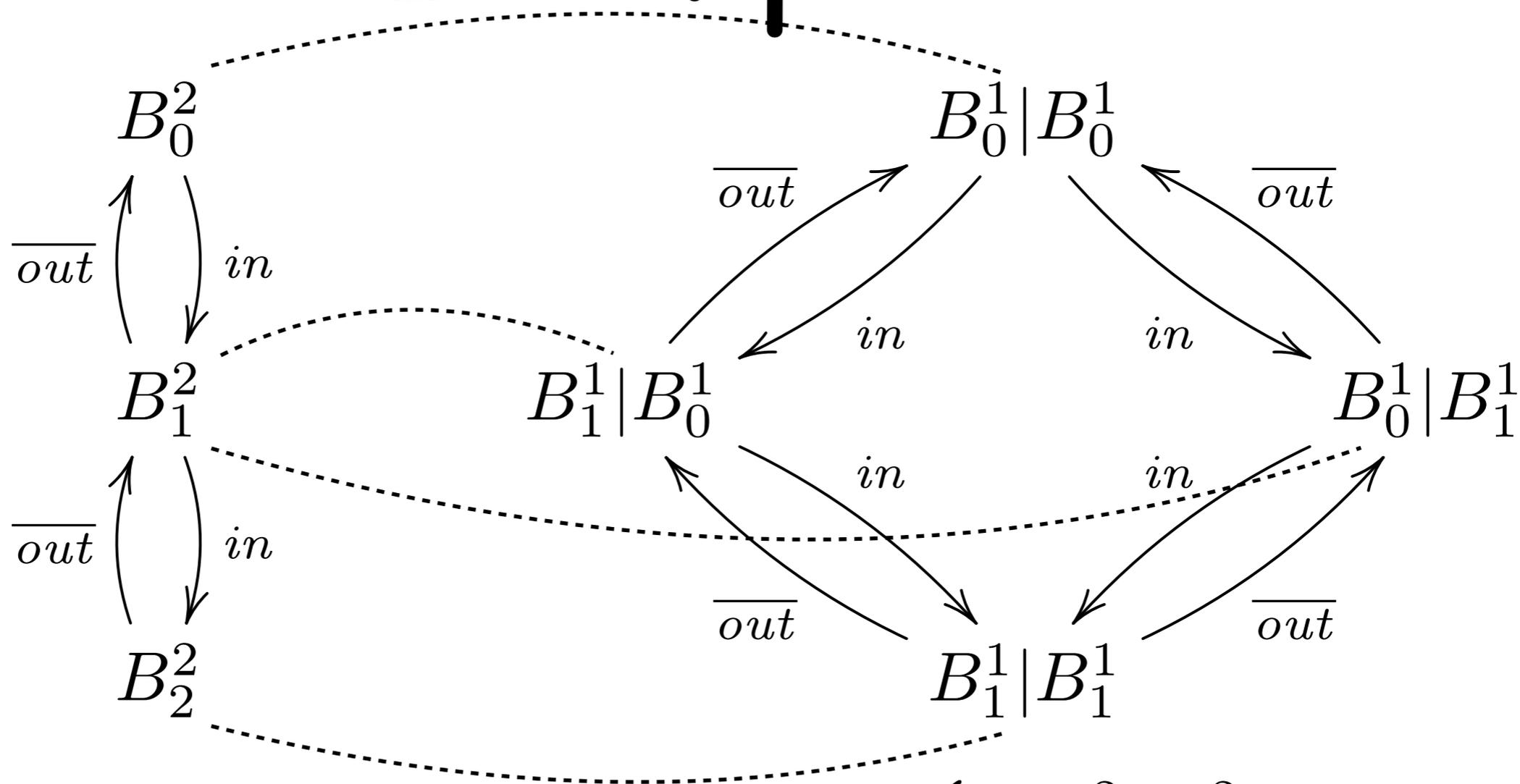
$$[p]_{\equiv} = \{q \mid p \equiv q\}$$

se $\equiv_{\mathbf{R}}$ e' una bisimulazione forte

$$q \in [p]_{\equiv_{\mathbf{R}}} \wedge p \xrightarrow{\mu} p' \Rightarrow \exists q' \in [p']_{\equiv_{\mathbf{R}}} \cdot q \xrightarrow{\mu} q'$$

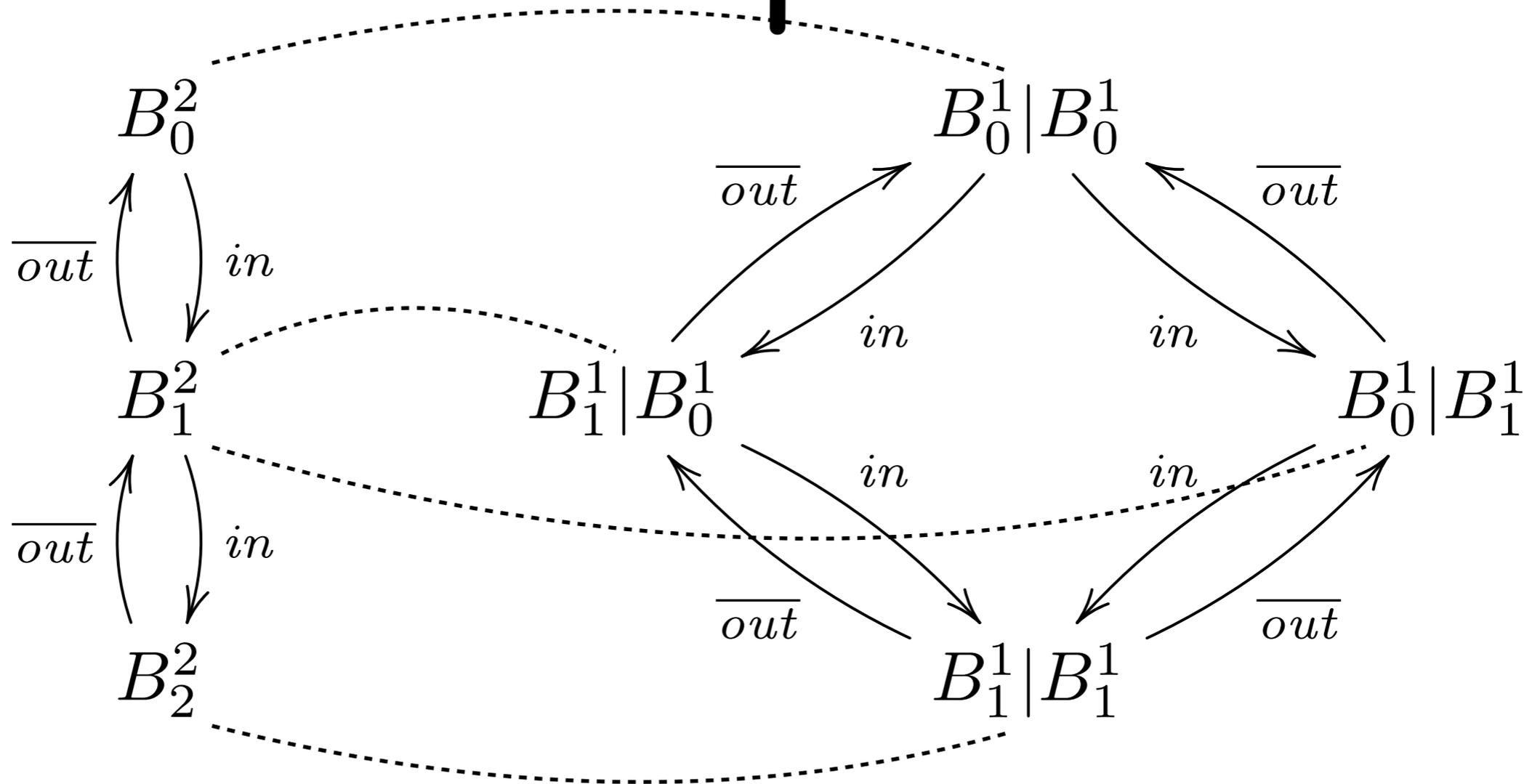
invece di elencare tutte le coppie di $\equiv_{\mathbf{R}}$
elenchiamo solo le sue classi di equivalenza

Esempio



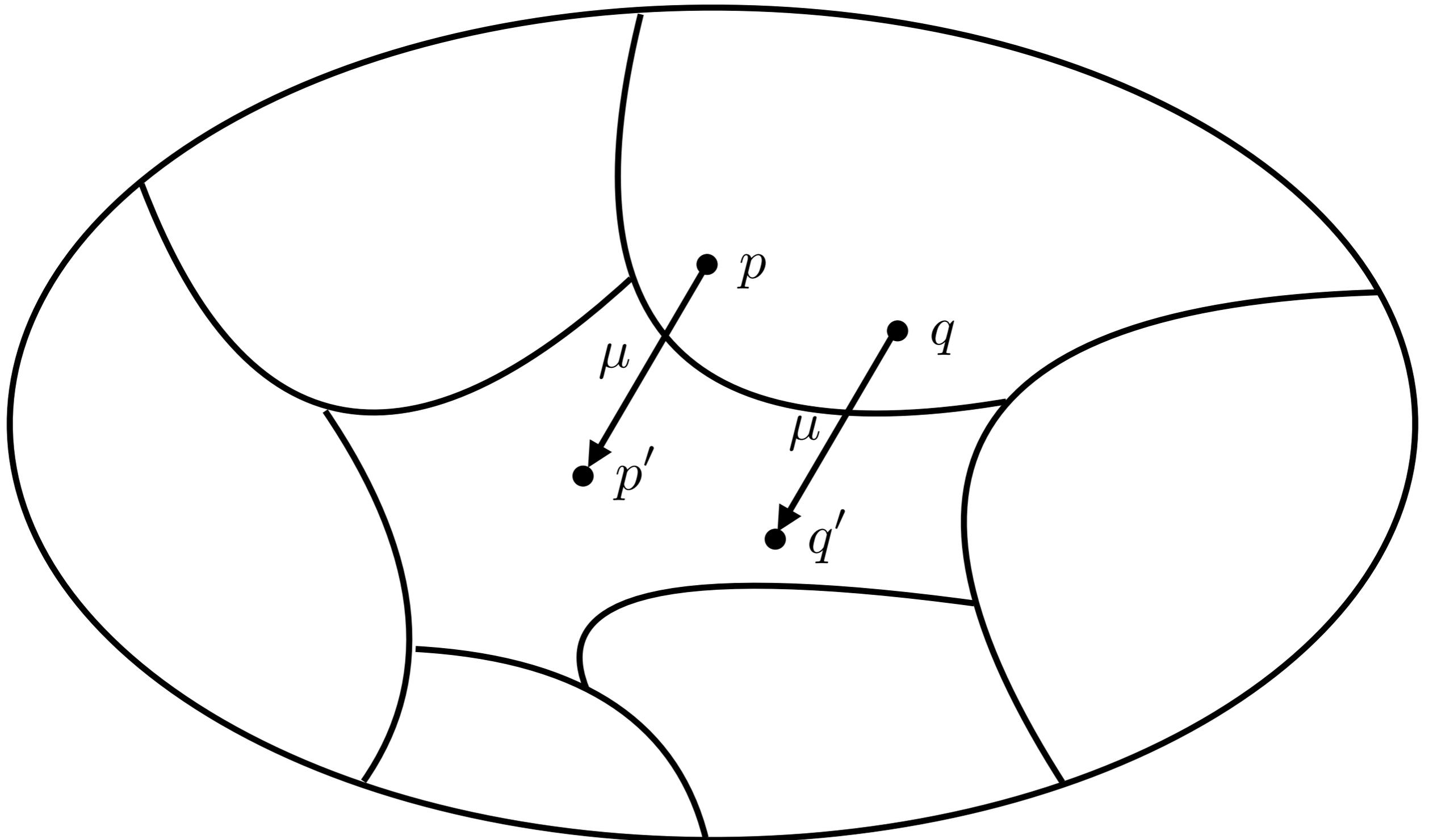
$$\mathbf{R} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (B_0^2, B_0^1 | B_0^1), \\ (B_1^2, B_1^1 | B_0^1), \\ (B_1^2, B_0^1 | B_1^1), \\ (B_2^2, B_1^1 | B_1^1) \end{array} \right\} \equiv_{\mathbf{R}} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (B_0^2, B_0^2), \\ (B_0^2, B_0^1 | B_0^1), \\ (B_0^1 | B_0^1, B_0^2), \\ (B_0^1 | B_0^1, B_0^1 | B_0^1), \\ (B_1^2, B_1^2), \\ \dots \end{array} \right\}$$

Esempio

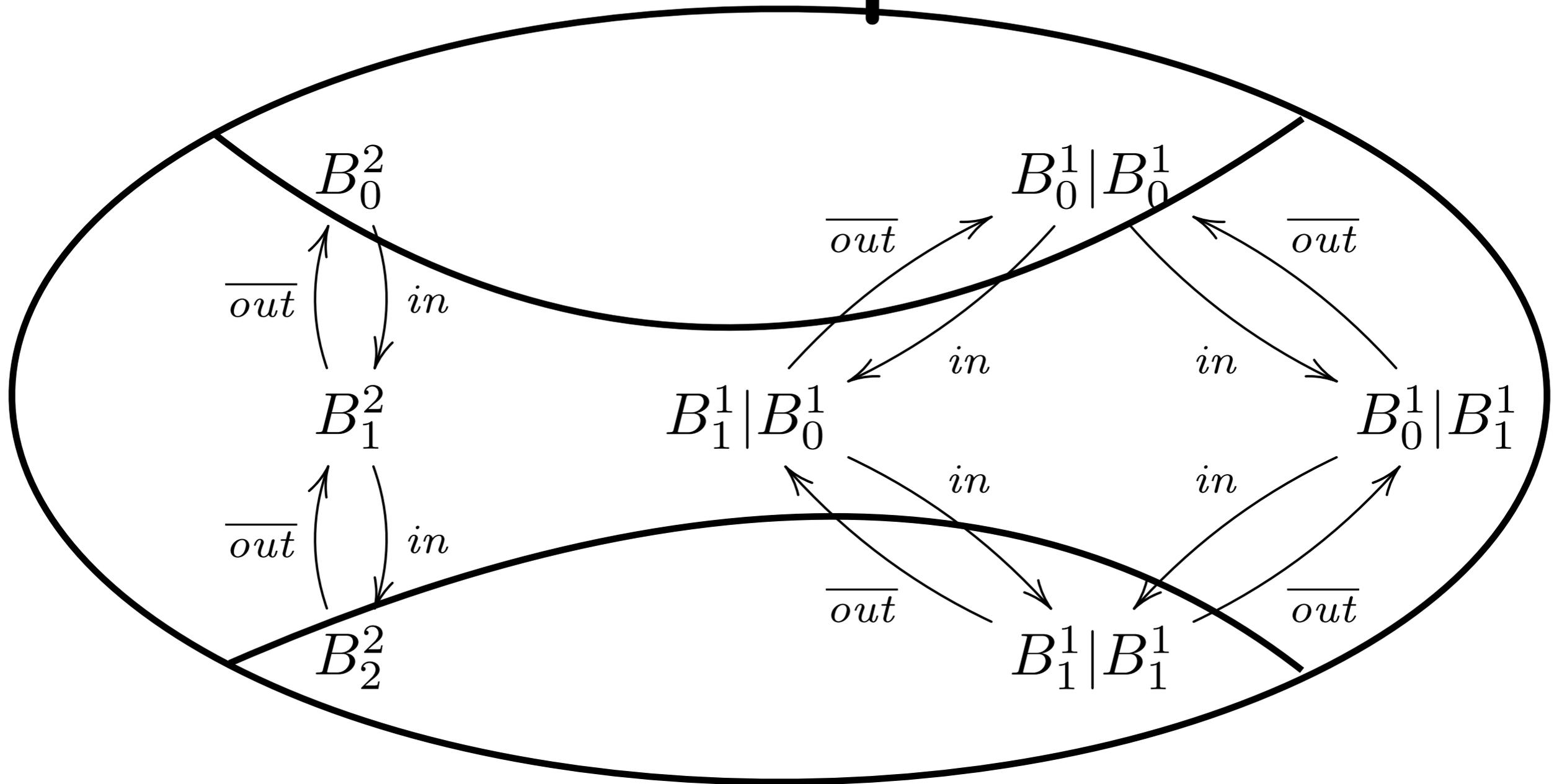


$$\mathbf{R} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (B_0^2, B_0^1|B_0^1), \\ (B_1^2, B_1^1|B_0^1), \\ (B_1^2, B_0^1|B_1^1), \\ (B_2^2, B_1^1|B_1^1) \end{array} \right\} \equiv_{\mathbf{R}} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \{B_0^2, B_0^1|B_0^1\}, \\ \{B_1^2, B_0^1|B_1^1, B_1^1|B_0^1\}, \\ \{B_2^2, B_1^1|B_1^1\} \end{array} \right\}$$

Controllo di bisimulazione



Esempio



$$\equiv_{\mathbf{R}} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \{B_0^2, B_0^1|B_0^1\}, \\ \{B_1^2, B_0^1|B_1^1, B_1^1|B_0^1\}, \\ \{B_2^2, B_1^1|B_1^1\} \end{array} \right\}$$

TH. la bisimilarita' forte e' una relazione di equivalenza

proof.

riflessiva $Id \subseteq \simeq$

simmetrica assumiamo $p \simeq q$ vogliamo provare $q \simeq p$

$p \simeq q$ significa che esiste una b.f. \mathbf{R} con $(p, q) \in \mathbf{R}$

allora $(q, p) \in \mathbf{R}^{-1}$ e \mathbf{R}^{-1} e' una b.f.

quindi $(q, p) \in \mathbf{R}^{-1} \subseteq \simeq$ cioe' $q \simeq p$

transitiva assumiamo $p \simeq q$ $q \simeq r$ vogliamo provare $p \simeq r$

$p \simeq q$ significa che c'e' una b.f. \mathbf{R}_1 con $(p, q) \in \mathbf{R}_1$

$q \simeq r$ significa che c'e' una b.f. \mathbf{R}_2 con $(q, r) \in \mathbf{R}_2$

allora $(p, r) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$ e' una b.f.

allora $(p, r) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 \subseteq \simeq$ cioe' $p \simeq r$

TH. La bisimilarita' forte e' una bisimulazione forte

prova.

prendiamo $p \simeq q$

prendiamo

$p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \simeq q'$

$p \simeq q$ significa che c'e' una \mathbf{R} con $(p, q) \in \mathbf{R}$

dal momento che \mathbf{R} e' una bisimulazione forte e $p \xrightarrow{\mu} p'$

abbiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

dal momento che $\mathbf{R} \subseteq \simeq$ abbiamo $p' \simeq q'$

prendiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $p' \simeq q'$

segue dal caso precedente (la bisimilarita' forte e' simmetrica)

Cor. la bisimilarita' forte e' la piu' grande bisimulazione

proof.

la bisimilarita' forte e' una bisimulazione forte (TH. prec.)

per definizione

$$\approx \triangleq \bigcup_{\mathbf{R} \text{ s.b.}} \mathbf{R}$$

ogni altra bisimulazione forte e' inclusa in \approx

TH. Definizione ricorsiva di bisimilarita' forte

$$\forall p, q. p \simeq q \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \mu, p'. p \xrightarrow{\mu} p' \Rightarrow \exists q'. q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \simeq q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'. q \xrightarrow{\mu} q' \Rightarrow \exists p'. p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \simeq q' \end{cases}$$

prova.

\Rightarrow) segue immediatamente perché \simeq è una bisimulazione forte

$$\Leftarrow) \text{ prendi } p, q \text{ t.c. } \begin{cases} \forall \mu, p'. p \xrightarrow{\mu} p' \Rightarrow \exists q'. q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \simeq q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'. q \xrightarrow{\mu} q' \Rightarrow \exists p'. p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \simeq q' \end{cases}$$

vogliamo provare $p \simeq q$

si fa provando che $\mathbf{R} \triangleq \{(p, q)\} \cup \simeq$ e' una b.f.

TH. Definizione ricorsiva di bisimilarita' forte

$\mathbf{R} \triangleq \{(p, q)\} \cup \simeq$ e' una b.f.

prendiamo $(r, s) \in \mathbf{R}$

se $r \xrightarrow{\mu} r'$ vogliamo trovare $s \xrightarrow{\mu} s'$ con $(r', s') \in \mathbf{R}$

se $r \simeq s$ troviamo $s \xrightarrow{\mu} s'$ con $(r', s') \in \simeq \subseteq \mathbf{R}$

perche' \simeq e' una bisimulazione

se $(r, s) = (p, q)$ allora $p \xrightarrow{\mu} r'$ e $\begin{cases} \forall \mu, p'. p \xrightarrow{\mu} p' \Rightarrow \exists q'. q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \simeq q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'. q \xrightarrow{\mu} q' \Rightarrow \exists p'. p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \simeq q' \end{cases}$

percio' troviamo $q \xrightarrow{\mu} s'$ con $(r', s') \in \simeq \subseteq \mathbf{R}$

se $s \xrightarrow{\mu} s'$ vogliamo trovare $r \xrightarrow{\mu} r'$ con $(r', s') \in \mathbf{R}$

analogo al caso precedente

CCS

Composizionalità'

Composizionalità

ricordate che \equiv e' una congruenza quando

$$\forall C[\cdot]. \forall p, q. p \equiv q \Rightarrow C[p] \equiv C[q]$$

possiamo sostituire processi equivalenti in qualsiasi contesto
senza cambiare la semantica astratta

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

$$1. \quad \forall p, q. p \simeq q \Rightarrow \forall \mu. \mu.p \simeq \mu.q$$

$$2. \quad \forall p, q. p \simeq q \Rightarrow \forall \alpha. p \setminus \alpha \simeq q \setminus \alpha$$

$$3. \quad \forall p, q. p \simeq q \Rightarrow \forall \phi. p[\phi] \simeq q[\phi]$$

$$4. \quad \forall p_0, q_0, p_1, q_1. p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \Rightarrow p_0 + p_1 \simeq q_0 + q_1$$

$$5. \quad \forall p_0, q_0, p_1, q_1. p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \Rightarrow p_0 | p_1 \simeq q_0 | q_1$$

omettiamo la quantificazione per rendere la dichiarazione più leggibile

TH. La bisimilarità forte è una congruenza

$$1. p \simeq q \Rightarrow \mu.p \simeq \mu.q$$

$$2. p \simeq q \Rightarrow p \setminus \alpha \simeq q \setminus \alpha$$

$$3. p \simeq q \Rightarrow p[\phi] \simeq q[\phi]$$

$$4. p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \Rightarrow p_0 + p_1 \simeq q_0 + q_1$$

$$5. p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \Rightarrow p_0 | p_1 \simeq q_0 | q_1$$

tecnica di prova:

"indovinare" una relazione abbastanza grande da contenere tutte le coppie di interesse;

mostrare che è una relazione di bisimulazione;

allora è contenuta nella relazione di bisimilarità forte

TH. La bisimilarità forte è una congruenza

$$\text{Rel)} \frac{p \xrightarrow{\mu} q}{p[\phi] \xrightarrow{\phi(\mu)} q[\phi]}$$

prendi $\mathbf{R} \triangleq \{(p[\phi], q[\phi]) \mid p \simeq q\}$

mostriamo che \mathbf{R} è una relazione di bisimulazione forte

prendi $(p[\phi], q[\phi]) \in \mathbf{R}$ (abbiamo $p \simeq q$)

prendi $p[\phi] \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q[\phi] \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

per la regola rel) deve essere $p \xrightarrow{\mu'} p''$ $\mu = \phi(\mu')$ $p' = p''[\phi]$

dal momento che $p \simeq q$ allora $q \xrightarrow{\mu'} q''$ con $p'' \simeq q''$

per la regola rel) $q[\phi] \xrightarrow{\phi(\mu')} q''[\phi]$

prendi $q' = q''[\phi]$ così che $(p', q') = (p''[\phi], q''[\phi]) \in \mathbf{R}$

prendi $q[\phi] \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p[\phi] \xrightarrow{\mu} p'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

analogo al caso precedente

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

prendi $\mathbf{R} \triangleq \{(p_0 + p_1, q_0 + q_1) \mid p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1\}$

mostriamo che \mathbf{R} è una relazione di bisimulazione forte

prendi $(p_0 + p_1, q_0 + q_1) \in \mathbf{R}$ (cioe' $p_0 \simeq q_0$ $p_1 \simeq q_1$)

prendi $p_0 + p_1 \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$ con

se la regola `suml`) e' stata usata: $p_0 \xrightarrow{\mu} p'$ $(p', q') \in \mathbf{R}$

dal momento che $p_0 \simeq q_0$ allora $q_0 \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \simeq q'$

per la regola `suml`) $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$

ma purtroppo $(p', q') \in \simeq$ non necessariamente implica

$(p', q') \in \mathbf{R}$

come possiamo riparare la prova?

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

$$\text{SumL)} \frac{p_1 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q}$$

$$\mathbf{R} \triangleq \{ (p_0 + p_1, q_0 + q_1) \mid p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \}$$

$$\boxed{\cup \simeq}$$

mostriamo che \mathbf{R} è una relazione di bisimulazione forte

prendi $(p_0 + p_1, q_0 + q_1) \in \mathbf{R}$ (cioe' $p_0 \simeq q_0$ $p_1 \simeq q_1$)

prendi $p_0 + p_1 \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

se la regola suml) e' stata usata: $p_0 \xrightarrow{\mu} p'$

dal momento che $p_0 \simeq q_0$ allora $q_0 \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \simeq q'$

per la regola suml) $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$

ma purtroppo $(p', q') \in \simeq$ non necessariamente implica

come possiamo riparare la prova? $(p', q') \in \mathbf{R}$

(non c'e' bisogno di controllare le coppie in \simeq)

CCS: alcune regole

$$p + \mathbf{nil} \simeq p$$

$$p + q \simeq q + p$$

$$p + (q + r) \simeq (p + q) + r$$

$$p + p \simeq p$$

$$p|\mathbf{nil} \simeq p$$

$$p|q \simeq q|p$$

$$p|(q|r) \simeq (p|q)|r$$

Come dimostrarle? Trovare una bisimulazione forte per ciascuna di esse

$$\mathbf{nil} \setminus \alpha \simeq \mathbf{nil}$$

$$(\mu.p) \setminus \alpha \simeq \mathbf{nil} \quad \text{if } \mu \in \{\alpha, \bar{\alpha}\}$$

$$(\mu.p) \setminus \alpha \simeq \mu.(p \setminus \alpha) \quad \text{if } \mu \notin \{\alpha, \bar{\alpha}\}$$

$$(p + q) \setminus \alpha \simeq (p \setminus \alpha) + (q \setminus \alpha)$$

$$p \setminus \alpha \setminus \alpha \simeq p \setminus \alpha$$

$$p \setminus \alpha \setminus \beta \simeq p \setminus \beta \setminus \alpha$$

$$\mathbf{nil}[\phi] \simeq \mathbf{nil}$$

$$(\mu.p)[\phi] \simeq \phi(\mu).(p[\phi])$$

$$(p + q)[\phi] \simeq (p[\phi]) + (q[\phi])$$

$$p[\phi][\eta] \simeq p[\eta \circ \phi]$$