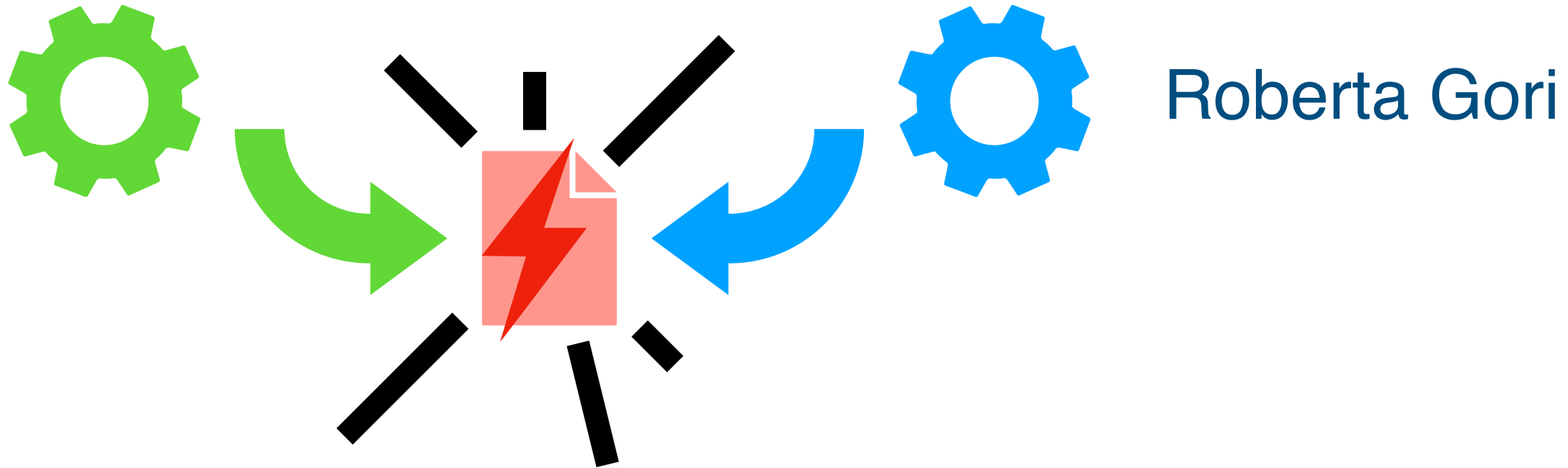


Linguaggi di Programmazione

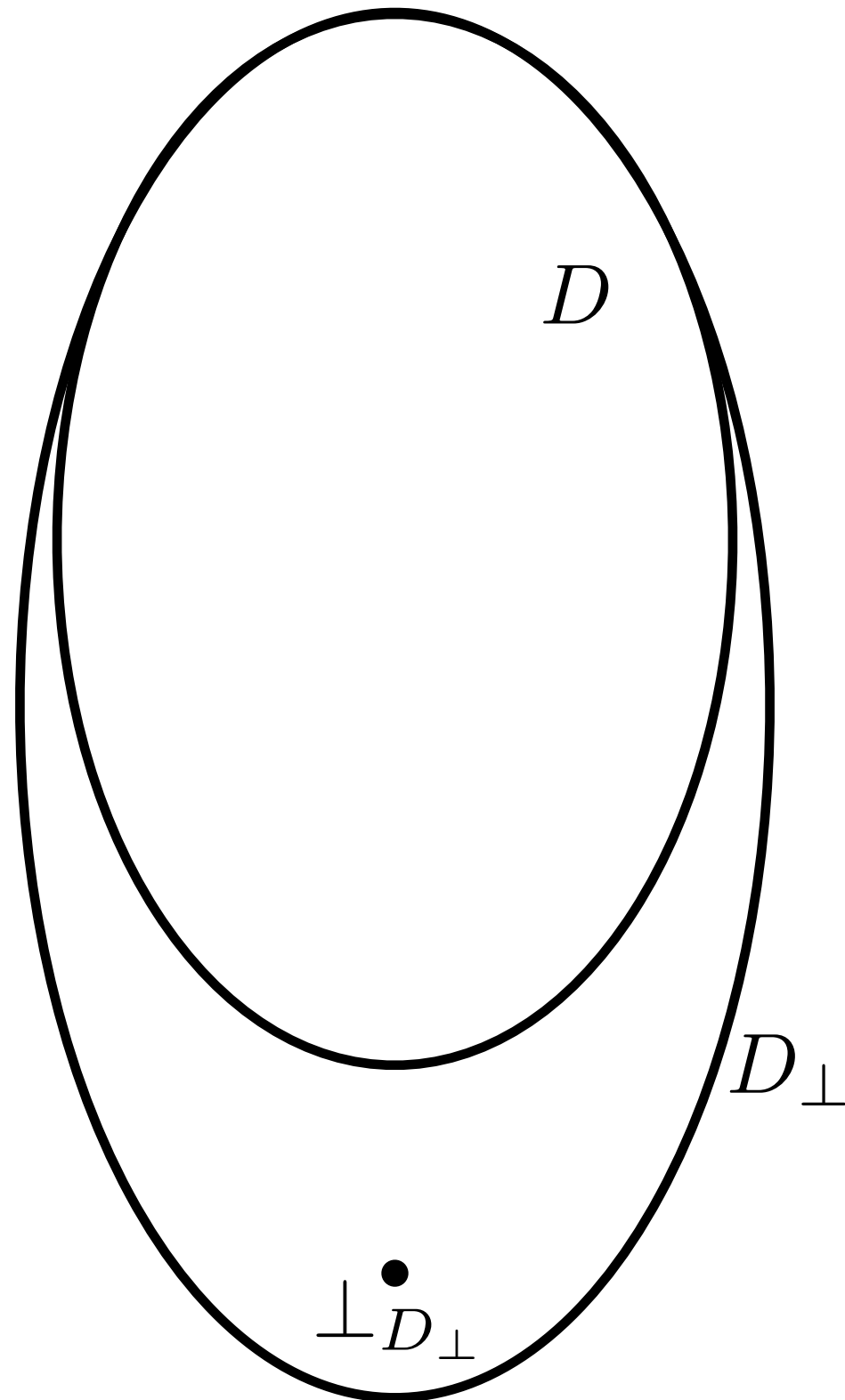


Teoremi di continuita' -8.5

Domini arricchiti con bottom

Domini arricchiti con bottom

Abbiamo già visto $Z_{\perp}$
generalizziamo l'idea:



Domini arricchiti con bottom

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D) \text{ CPO} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_\perp = (D_\perp, \sqsubseteq_{D_\perp})$$

$$D_\perp \triangleq \{\perp\} \uplus D$$

$$= \{(0, \perp)\} \cup (\{1\} \times D) = \{(0, \perp)\} \cup \{(1, d) \mid d \in D\}$$

$$\perp_{D_\perp} \triangleq (0, \perp)$$

$$\begin{aligned} \lfloor \cdot \rfloor : D &\rightarrow D_\perp \\ \lfloor d \rfloor &\triangleq (1, d) \end{aligned} \quad \text{lifting function}$$

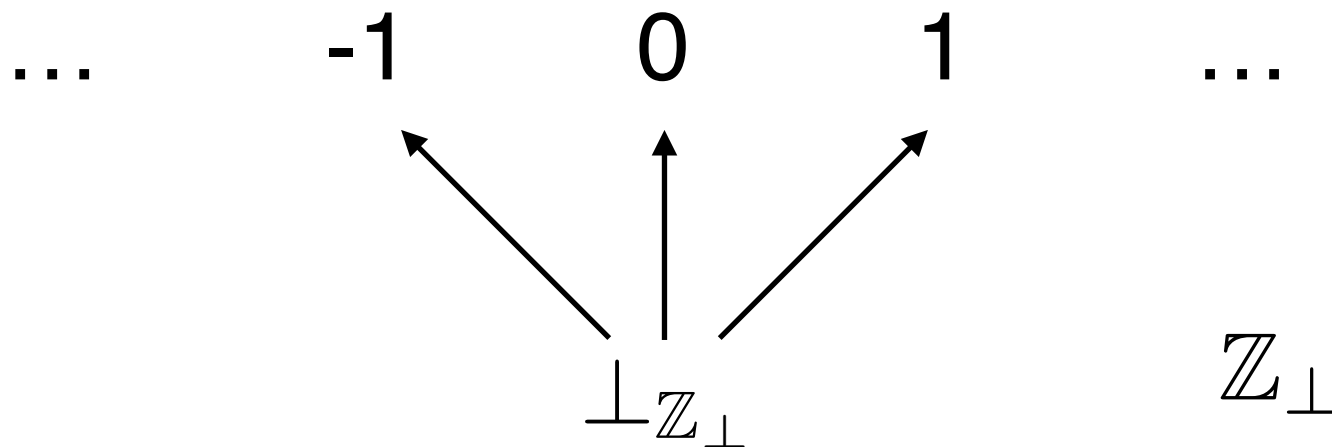
come ordiniamo gli elementi liftati?

$$\forall x \in D_\perp. \perp_{D_\perp} \sqsubseteq_{D_\perp} x$$

$$\forall d_1, d_2 \in D. \lfloor d_1 \rfloor \sqsubseteq_{D_\perp} \lfloor d_2 \rfloor \Leftrightarrow d_1 \sqsubseteq_D d_2$$

Esempio

$(\mathbb{Z}, =)$



Domini arricchiti con bottom

TH. Let D a CPO then $\mathcal{D}_\perp = (D_\perp , \sqsubseteq_{D_\perp})$ is a $\text{CPO}_\perp$

provatelo da soli:

OP,

ha elemento bottom,

per la completezza
osservare che:

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \lfloor d_i \rfloor = \left\lfloor \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right\rfloor$$

e' il least upper bound

Domini arricchiti con bottom

$(D, \sqsubseteq_D)$ CPO

$(E, \sqsubseteq_E)$ CPO $_{\perp}$

$$(\cdot)^* : [D \rightarrow E] \rightarrow [D_{\perp} \rightarrow E]$$

$$\forall f \in [D \rightarrow E]. f^*(x) \triangleq \begin{cases} \perp_E & \text{if } x = \perp_{D_{\perp}} \\ f(d) & \text{if } x = [d] \end{cases}$$

perché la definizione sia ben costruita
abbiamo bisogno di provare:

$$\begin{array}{ccc} f \in [D \rightarrow E] & \Rightarrow & f^* \in [D_{\perp} \rightarrow E] \\ f \text{ continua} & \text{implica} & f^* \text{ continua} \end{array}$$

TH. l'operatore di lifting e' ben definito:

$$f \in [D \rightarrow E] \Rightarrow f^* \in [D_{\perp} \rightarrow E]$$

prova. assumiamo f continua, prendiamo una catena $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D_{\perp}$

dobbiamo provare
$$f^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_n \right) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_n)$$

se $\forall n \in \mathbb{N}. x_n = \perp_{D_{\perp}}$ allora è ovvio

altrimenti, consideriamo $k = \min\{i \mid x_i \neq \perp_{D_{\perp}}\}$

allora $\forall m \geq k. \exists d_m \in D. x_m = \lfloor d_m \rfloor$

e per l'indipendenza dei lub dai prefissi

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_{n+k} \quad \text{e anche che} \quad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_n) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_{n+k})$$

possiamo ridurci a provare che
$$f^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_{n+k} \right) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_{n+k})$$

(continua)

$$f^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_{n+k} \right) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_{n+k})$$

$$f^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_{n+k} \right) = f^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \lfloor d_{n+k} \rfloor \right)$$

per def di k

$$= f^* \left(\left\lfloor \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} d_{n+k} \right\rfloor \right)$$

per lub in un dominio liftato

$$= f \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} d_{n+k} \right)$$

per def di lifting

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f(d_{n+k})$$

per continuita' di f

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(\lfloor d_{n+k} \rfloor)$$

per def di lifting

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_{n+k})$$

per def di k

TH. L'operatore $(\cdot)^*$ e' monotono

(provatelo)

TH. L'operatore $(\cdot)^*$ e' continuo

prova. prendiamo una catena di funzioni continue $\{f_i : D \rightarrow E\}_{i \in \mathbb{N}}$

dobbiamo provare
$$\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right)^* = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^*$$

consideriamo un generico $x \in D_{\perp}$

dobbiamo provare
$$\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right)^* (x) = \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^* \right) (x)$$

se $x = \perp_{D_{\perp}}$ e' ovvio

se $x = \lfloor d \rfloor$ abbiamo...

(continua)

$$\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right)^* (\lfloor d \rfloor) = \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^* \right) (\lfloor d \rfloor)$$

$$\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right)^* (\lfloor d \rfloor) = \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right) (d) \quad \text{per def di lifting}$$

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(d) \quad \text{per lub di un dominio funzionale}$$

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^*(\lfloor d \rfloor) \quad \text{per def di lifting}$$

$$= \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i^* \right) (\lfloor d \rfloor)$$

per lub in un dominio funzionale

Notazione let (de-lifting)

$$(E, \sqsubseteq_E) \quad \text{CPO}_\perp \quad \lambda x. e \in [D \rightarrow E] \quad t \in D_\perp$$

$$\text{let } x \Leftarrow t. e \quad \triangleq \quad \underbrace{\underbrace{(\lambda x. e)^*}_{[D \rightarrow E]} \underbrace{t}_{D_\perp}}_{[D_\perp \rightarrow E]} = \begin{cases} \perp_E & \text{if } t = \perp_{D_\perp} \\ e^{[d/x]} & \text{if } t = [d] \end{cases}$$

intuitivamente:

se t e' un valore liftato $[d]$ allora de-liftiamo il valore e
lo assegniamo a x in e

altrimenti ritorniamo $\perp_E$

Teoremi di continuita'

TH. $\begin{matrix} (D, \sqsubseteq_D) \\ (E_i, \sqsubseteq_{E_i}) \end{matrix}$ CPO $f : D \rightarrow E_1 \times E_2$ $g_i \triangleq \pi_i \circ f$

f e' continua sse g_1, g_2 sono continue

proof. $\Rightarrow$) f e' continua $\Rightarrow g_i$ e' continua
 π_i e' continua

$\Leftarrow$) notiamo che $\forall d \in D. f(d) = (g_1(d), g_2(d))$

assumiamo g_1, g_2 continue

vogliamo provare f continua

consideriamo una catena $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in D

vogliamo provare $f \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i)$

(continua)

$$f \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i)$$

$$f \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \left(g_1 \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right), g_2 \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) \right) \quad \text{per def } g_1, g_2$$

$$= \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} g_1(d_i), \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} g_2(d_i) \right) \quad g_1, g_2 \text{ sono continue}$$

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (g_1(d_i), g_2(d_i)) \quad \text{per def di lub delle coppie}$$

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) \quad \text{per def } g_1, g_2$$

TH.

$(D, \sqsubseteq_D)$

$(E, \sqsubseteq_E)$

$(F, \sqsubseteq_F)$

CPO

$f : D \times E \rightarrow F$

$f_d : E \rightarrow F$

$f_d \triangleq \lambda e. f(d, e)$

$f_e : D \rightarrow F$

$f_e \triangleq \lambda d. f(d, e)$

f e' continua

sse

$\forall d \in D. f_d$ sono continue

$\forall e \in E. f_e$ sono continue

prova. $\Rightarrow$) assumiamo f continua

prendiamo un generico $d \in D$

vogliamo provare f_d e' continua

prendiamo una catena $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in E

proviamo $f_d \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_d(e_i)$

$e \in E$

f_e

(omessa
prova)

(continua)

$$f_d \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_d(e_i)$$

$$f_d \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right) = f \left(d, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$$

per def di f_d

$$= f \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$$

per lub della catena costante

$$= f \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (d, e_i) \right)$$

per lub delle coppie

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d, e_i)$$

per continuita' di f

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_d(e_i)$$

per def di f_d

TH.

$(D, \sqsubseteq_D)$

$(E, \sqsubseteq_E)$

$(F, \sqsubseteq_F)$

CPO

$f : D \times E \rightarrow F$

$f_d : E \rightarrow F$

$f_d \triangleq \lambda e. f(d, e)$

$f_e : D \rightarrow F$

$f_e \triangleq \lambda d. f(d, e)$

f e' continua

sse

$\forall d \in D. f_d$ sono continue

$\forall e \in E. f_e$ sono continue

prova. $\Leftarrow$) assumiamo f_d, f_e continue per ogni d, e

vogliamo provare f continua

prendiamo una catena $\{(d_k, e_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \times E$

proviamo $f \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (d_k, e_k) \right) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} f(d_k, e_k)$

(continua) $f \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (d_k, e_k) \right) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} f(d_k, e_k)$

$$f(\bigsqcup_k (d_k, e_k)) = f(\bigsqcup_i d_i, \bigsqcup_j e_j) \quad \text{per def del lub delle coppie}$$

$$= f_d(\bigsqcup_j e_j) \quad \text{per def of } f_d \text{ con } d \triangleq \bigsqcup_i d_i$$

$$= \bigsqcup_j f_d(e_j) \quad \text{per continuita' di } f_d$$

$$= \bigsqcup_j f(d, e_j) \quad \text{per def di } f_d$$

$$= \bigsqcup_j f_{e_j}(d) \quad \text{per def di } f_{e_j}$$

$$= \bigsqcup_j f_{e_j}(\bigsqcup_i d_i) \quad \text{per def di } d \triangleq \bigsqcup_i d_i$$

$$= \bigsqcup_j \bigsqcup_i f_{e_j}(d_i) \quad \text{per continuita' di } f_{e_j}$$

$$= \bigsqcup_j \bigsqcup_i f(d_i, e_j) \quad \text{per def di } f_{e_j}$$

$$= \bigsqcup_k f(d_k, e_k) \quad \text{per lo switch lemma (applicabile?)}$$

(continua) $f \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (d_k, e_k) \right) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} f(d_k, e_k)$

se $i \leq n \wedge j \leq m$ allora $f(d_i, e_j) \sqsubseteq f(d_n, e_m)$? 

$\Downarrow$

$$d_i \sqsubseteq_D d_n \wedge e_j \sqsubseteq_E e_m$$

$$f(d_i, e_j) = f_{d_i}(e_j) \sqsubseteq f_{d_i}(e_m) = f(d_i, e_m) = f_{e_m}(d_i) \sqsubseteq f_{e_m}(d_n) = f(d_n, e_m)$$

f_{d_i}

monotona

f_{e_m}

monotona

$$= \bigsqcup_j \bigsqcup_i f(d_i, e_j)$$



$$= \bigsqcup_k f(d_k, e_k)$$

per lo switch lemma (applicabile?)

Alcune funzioni importanti

Syntax

$$\begin{array}{lcl} t & ::= & x \mid n \mid t_0 \text{ op } t_1 \mid \text{if } t \text{ then } t_0 \text{ else } t_1 \\ & & \mid (t_0, t_1) \mid \text{fst}(t) \mid \text{snd}(t) \\ & & \mid \lambda x. t \mid t_0 \ t_1 \\ & & \mid \text{rec } x. t \end{array}$$

Apply (per $t_0 t_1$)

$(D, \sqsubseteq_D)$
 $(E, \sqsubseteq_E)$ CPO

$apply : [D \rightarrow E] \times D \rightarrow E$
 $apply(f, d) \triangleq f(d)$

TH. $apply$ e' monotona
(provatelo)

TH. $apply$ e' continua

prova. da un teorema precedente, dimostriamo la continuità su ogni parametro separatamente $apply_f$ $apply_d$

1. per ogni $f \in [D \rightarrow E]$ $apply_f \triangleq \lambda d. f(d)$ e' continua

2. per ogni $d \in D$ $apply_d \triangleq \lambda f. f(d)$ e' continua

1. per ogni $f \in [D \rightarrow E]$ $apply_f \triangleq \lambda d. f(d)$ e' continua

prendiamo $f \in [D \rightarrow E]$ e una catena $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in D

vogliamo provare $apply_f \left(\bigsqcup_i d_i \right) = \bigsqcup_i apply_f(d_i)$

$$apply_f(\bigsqcup_i d_i) = apply(f, \bigsqcup_i d_i) \quad \text{per def di } apply_f$$

$$= f(\bigsqcup_i d_i) \quad \text{per def di } apply$$

$$= \bigsqcup_i f(d_i) \quad \text{per continuita' di } f$$

$$= \bigsqcup_i apply(f, d_i) \quad \text{per def di } apply$$

$$= \bigsqcup_i apply_f(d_i) \quad \text{per def di } apply_f$$

2. per ogni $d \in D$ $apply_d \triangleq \lambda f. f(d)$ e' continua

prendiamo $d \in D$ una catena $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $[D \rightarrow E]$

vogliamo provare $apply_d \left(\bigsqcup_i f_i \right) = \bigsqcup_i apply_d(f_i)$

$$apply_d(\bigsqcup_i f_i) = apply(\bigsqcup_i f_i, d) \quad \text{per def di } apply_d$$

$$= (\bigsqcup_i f_i)(d) \quad \text{per def di } apply$$

$$= \bigsqcup_i f_i(d) \quad \text{per def di lub di funzioni}$$

$$= \bigsqcup_i apply(f_i, d) \quad \text{per def di } apply$$

$$= \bigsqcup_i apply_d(f_i) \quad \text{per def di } apply_d$$

Apply: recap

$$\begin{array}{ll} (D, \sqsubseteq_D) & \text{CPO} \\ (E, \sqsubseteq_E) & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{apply} : [D \rightarrow E] \times D \rightarrow E \\ \text{apply}(f, d) \triangleq f(d) \end{array}$$

$$\text{apply} \in [[D \rightarrow E] \times D \rightarrow E]$$

Fix (per $rec\ x.t$)

$(D, \sqsubseteq_D)$ CPO $_{\perp}$

$fix : [D \rightarrow D] \rightarrow D$

$fix \triangleq \lambda f. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp_D)$

TH. fix e' monotona

(provatelo)

TH. fix e' continua

prova. $fix \triangleq \lambda f. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp_D) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda f. f^n(\perp_D)$

per def di lub sui domini funzionali

proviamo che $\forall n. \lambda f. f^n(\perp_D)$ e' continua

(per induzione matematica su n)

allora fix sara' continua perche' lub di funzioni continue

(continua) $\forall n. \lambda f. f^n(\perp_D)$

caso base: $\lambda f. f^0(\perp_D) = \lambda f. \perp_D$

e' una funzione costante (continua)

caso induttivo: assumiamo $g \triangleq \lambda f. f^n(\perp_D)$ continua

vogliamo provare $h \triangleq \lambda f. f^{n+1}(\perp_D)$ e' continua

prendiamo $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $[D \rightarrow D]$

vogliamo provare $h \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(f_i)$

(continua) $\forall n. \lambda f. f^n(\perp_D)$

$$\begin{aligned} g &\triangleq \lambda f. f^n(\perp_D) \\ h &\triangleq \lambda f. f^{n+1}(\perp_D) \end{aligned} \quad h\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i\right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(f_i)$$

$$h(\bigsqcup_i f_i) = (\bigsqcup_i f_i)^{n+1}(\perp_D)$$

per def di h

$$= (\bigsqcup_j f_j)((\bigsqcup_i f_i)^n(\perp_D))$$

per def di $(\cdot)^{n+1}$

$$= (\bigsqcup_j f_j)(g(\bigsqcup_i f_i))$$

per def di g

$$= (\bigsqcup_j f_j)(\bigsqcup_i g(f_i))$$

per ip.ind. (g continua)

$$= (\bigsqcup_j f_j)(\bigsqcup_i f_i^n(\perp_D))$$

per def di g

$$= \bigsqcup_j f_j(\bigsqcup_i f_i^n(\perp_D))$$

per def di lub nel CPO funzionale

$$= \bigsqcup_j \bigsqcup_i f_j(f_i^n(\perp_D))$$

per continuita'di f_j

$$= \bigsqcup_k f_k(f_k^n(\perp_D))$$

per switch lemma

$$= \bigsqcup_k f_k^{n+1}(\perp_D)$$

per def di $(\cdot)^{n+1}$

$$= \bigsqcup_k h(f_k)$$

per def di h

Fix: recap

$(D, \sqsubseteq_D)$ CPO $_{\perp}$

$$\begin{aligned} fix &: [D \rightarrow D] \rightarrow D \\ fix &\triangleq \lambda f. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp_D) \end{aligned}$$

$$fix \in [[D \rightarrow D] \rightarrow D]$$

Unione disgiunta (da consegnare)

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D)$$

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E) \quad \text{CPO}_\perp \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} + \mathcal{E} = (D \uplus E, \sqsubseteq_{D \uplus E})$$

$$D \uplus E \triangleq \{(0, d) \mid d \in D\} \cup \{(1, e) \mid e \in E\}$$

come ordinare gli elementi?

c'è l'elemento bottom?

è un ordine completo?

come definire iniezioni continue?

$$\iota_D : D \rightarrow D \uplus E$$

$$\iota_E : E \rightarrow D \uplus E$$