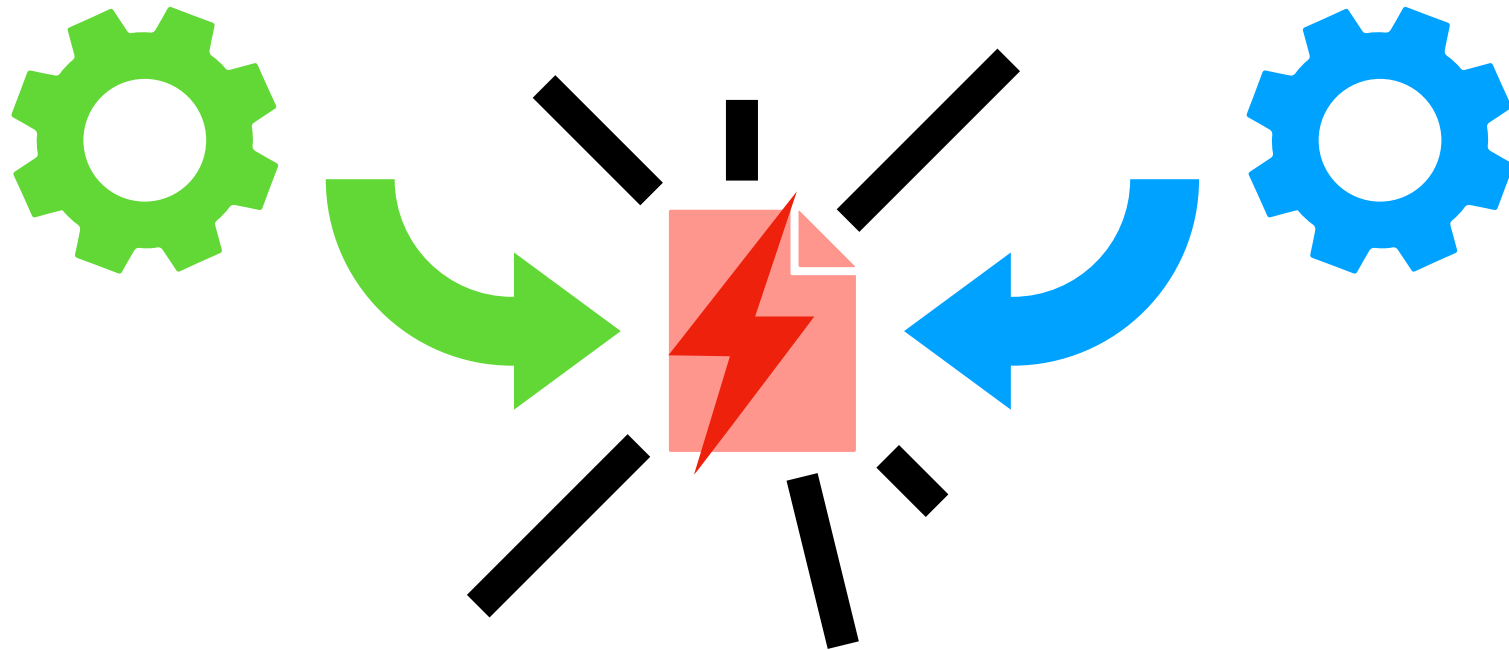


# Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori



Domini Funzionali-8.3

# Switch Lemma

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$e_{0,0}$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1}$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{0,m} \sqsubseteq \cdots$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$\begin{array}{ccccccc} e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\ \sqcup & & \sqcup & & \sqcup & & & & \sqcup & & \\ e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots \end{array}$$



# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup \\
 e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup \\
 e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{1,m} \sqsubseteq \cdots \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup \\
 e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{0,m} \sqsubseteq \cdots
 \end{array}$$



# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\
 e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\
 e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\
 e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{1,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\
 \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\
 e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{0,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & 
 \end{array}$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

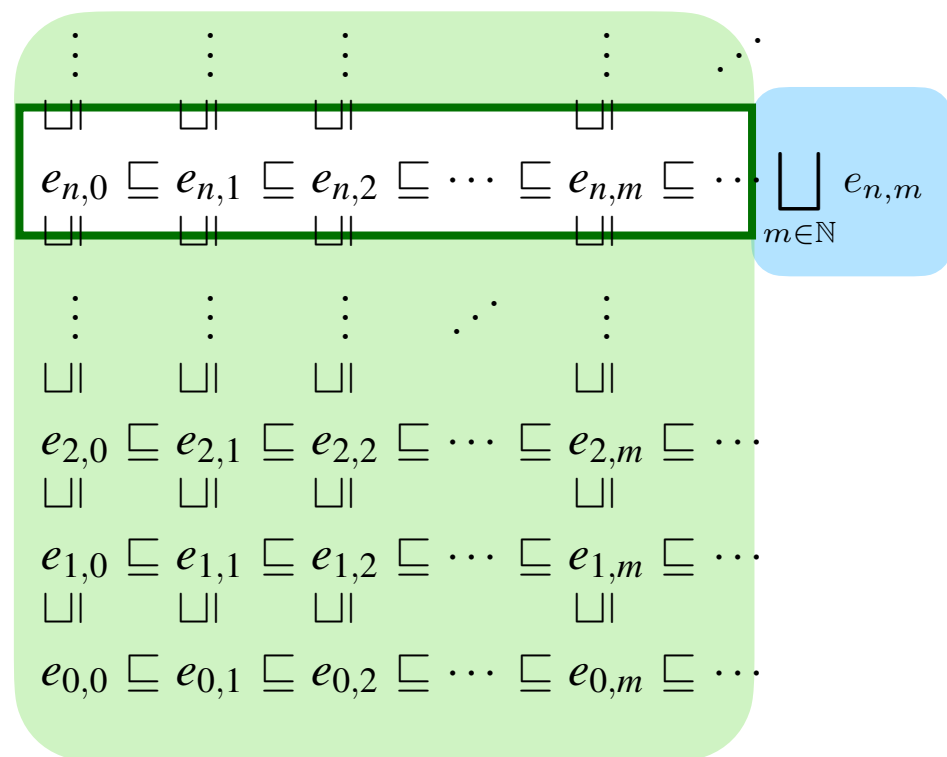
un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato  $n$  l'insieme  $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

forma una catena (una riga nella figura)

che ha un lub ( $E$  e' un CPO)



$$\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

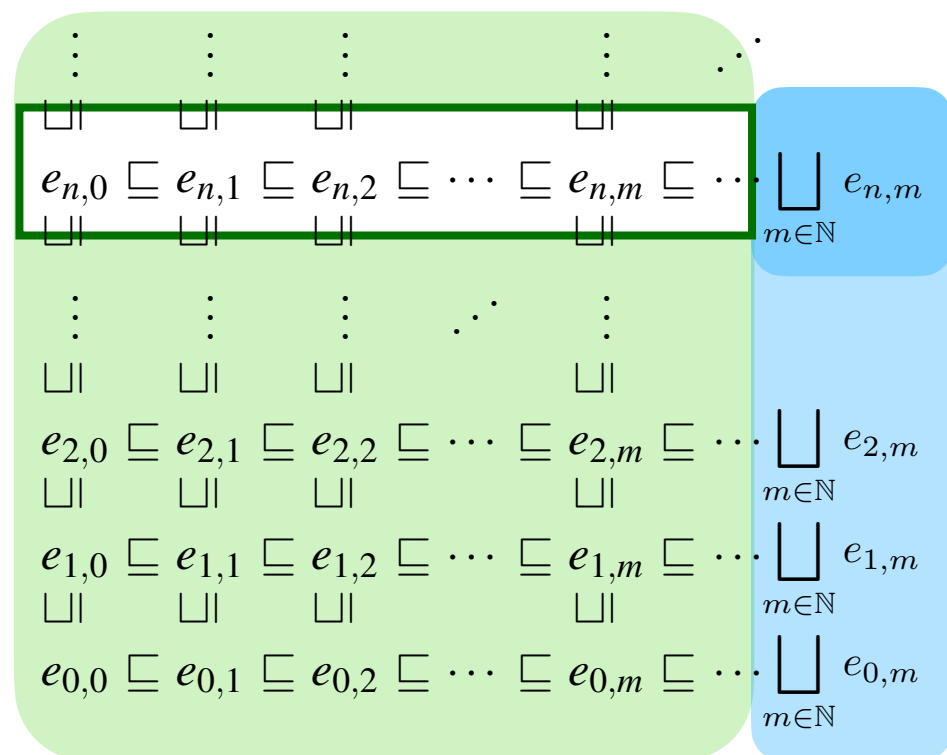
un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato  $n$  l'insieme  $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

forma una catena (una riga nella figura)

che ha un lub ( $E$  è un CPO)



$$\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

formiamo la catena di tutti lub delle righe

$$\left\{ \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

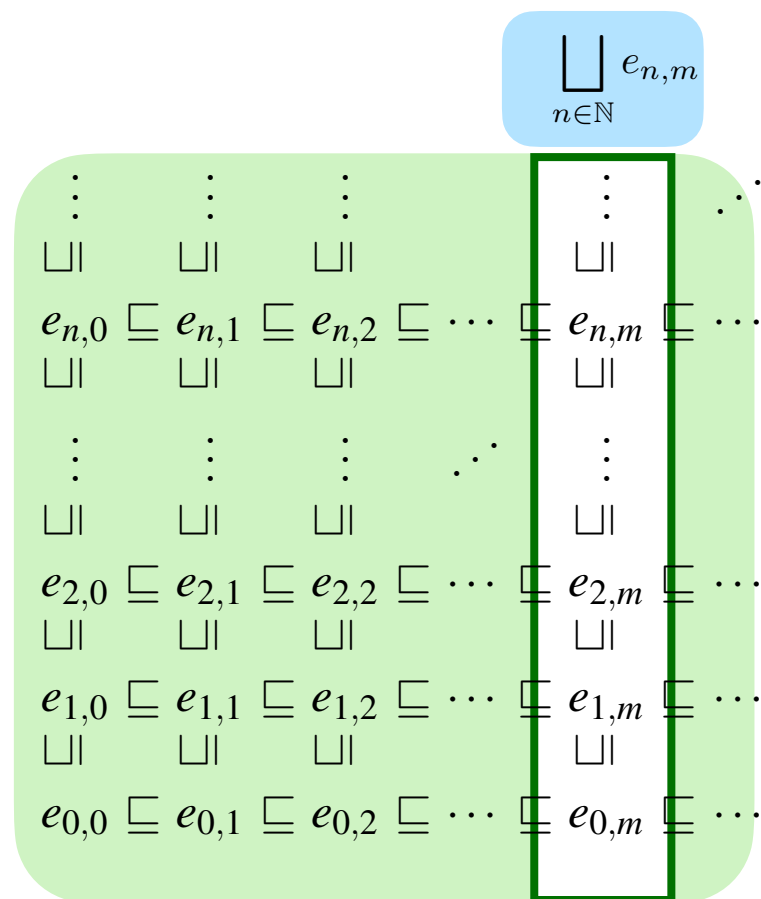
un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato  $m$  l'insieme  $\{e_{n,m}\}_{n \in \mathbb{N}}$

forma una catena (una colonna nella figura)

che ha un lub ( $E$  e' un CPO)



$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

# Switch Lemma

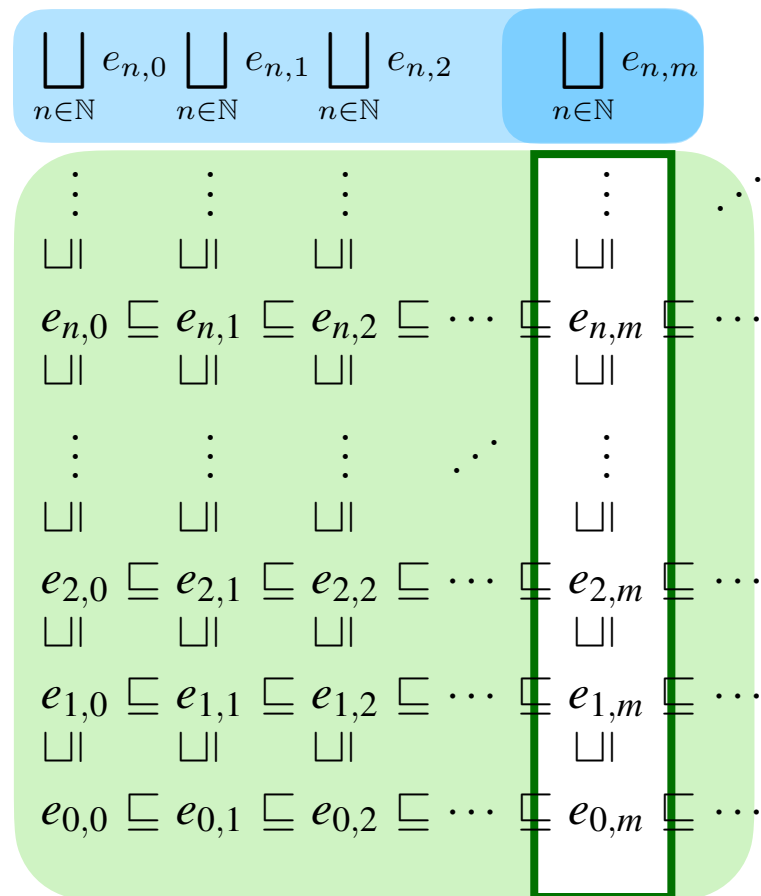
$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$  se  $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato  $n$  l'insieme  $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

forma una catena (una colonna nella figura)  
e quindi ha lub ( $E$  e' un CPO)



$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

formiamo la catena di tutti lub delle colonne

$$\left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

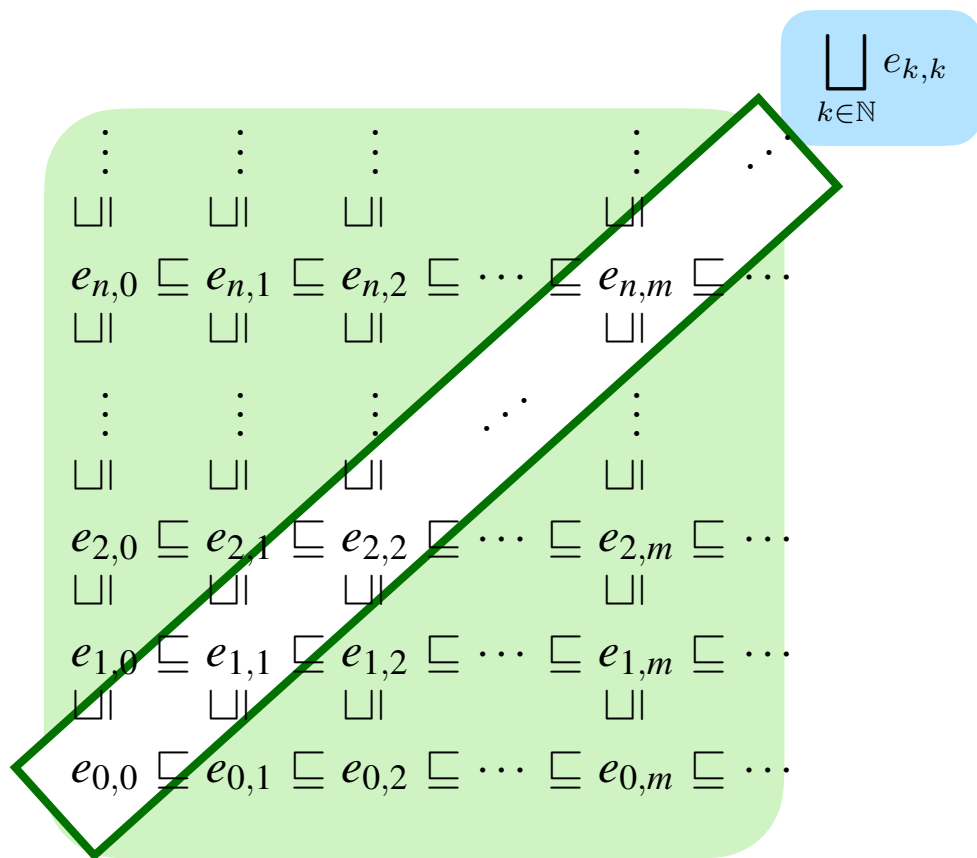
un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{se } n \leq n' \wedge m \leq m'$$

gli elementi diagonali  $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

formano un catena

che ha lub ( $E$  è un CPO)



$$\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} e_{k,k}$$

# Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena)  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{se } n \leq n' \wedge m \leq m'$$

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{1,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{0,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \end{array}$$

proviamo che  
tutti questi insiemi hanno  
gli stessi u.b.  
e quindi lo stesso lub

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} e_{k,k} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

$$\left\{ \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

$$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$



(i)

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

ha gli stessi u.b. di

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove 
$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \sqcup \\ e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \\ e_2 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{2,m} \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \\ e_1 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{1,m} \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \\ e_0 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{0,m} \end{array}$$



(i)

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

stesso u.b. di

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove 
$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

1. prendiamo un u.b.  $e$  di  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$e$

prendiamo un indice di riga  $n$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \sqcup \\ e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \\ e_2 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{2,m} \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \\ e_1 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{1,m} \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \\ e_0 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{0,m} \end{array}$$

proviamo  $e_n \sqsubseteq e$

$$\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

una riga la matrice

$e$  è un u.b. di  $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \text{ è un lub}$$

perciò  $e_n \sqsubseteq e$

(i)

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

stesso u.b. di

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove 
$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

2. prendiamo un u.b.  $e$  di  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

$e$

prendiamo indici  $n, m$

proviamo  $e_{n,m} \sqsubseteq e$

$$e_{n,m} \sqsubseteq \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} = e_n \sqsubseteq e$$

un elemento  
della riga

il lub  
di quella riga

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \cdots & \sqsubseteq & e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & \sqsubseteq & e_2 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{2,m} & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & \sqsubseteq & e_1 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{1,m} & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & \sqsubseteq & e_0 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{0,m} & & & & \end{array}$$

(ii)

$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  stesso u.b. di

$$\left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

la prova è analoga alla precedente  
(ragioniamo per colonne, non per righe)

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,0} \quad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,1} \quad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,2} \quad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & & \sqcup & & \\ e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots & & & & & & \end{array}$$

(iii)

$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

stesso u.b. di

$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

1. prendiamo un u.b.  $e$  di  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per  $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

$e$

ma questo è immediato, perché

$$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

la diagonale

l'intera matrice

The diagram shows an infinite matrix with rows and columns indexed by natural numbers. The elements are  $e_{n,m}$ . A blue diagonal band highlights the elements  $e_{k,k}$ . The matrix is represented as follows:

|                                                                                                           |          |          |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|
| $\vdots$                                                                                                  | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\sqcup$                                                                                                  | $\sqcup$ | $\sqcup$ | $\sqcup$ |
| $e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \dots$ |          |          |          |
| $\sqcup$                                                                                                  | $\sqcup$ | $\sqcup$ | $\sqcup$ |
| $\vdots$                                                                                                  | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\sqcup$                                                                                                  | $\sqcup$ | $\sqcup$ | $\sqcup$ |
| $e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \dots$ |          |          |          |
| $\sqcup$                                                                                                  | $\sqcup$ | $\sqcup$ | $\sqcup$ |
| $e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \dots$ |          |          |          |
| $\sqcup$                                                                                                  | $\sqcup$ | $\sqcup$ | $\sqcup$ |
| $e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \dots$ |          |          |          |

(iii)

$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

stesso u.b. di

$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

2. prendiamo un u.b.  $e$  di  $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per  $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

$e$

prendiamo gli indici  $n, m$

proviamo  $e_{n,m} \sqsubseteq e$

sia  $k = \max\{n, m\}$

$e_{n,m} \sqsubseteq e_{k,k} \sqsubseteq e$

$n \leq k \wedge m \leq k$

$e$  è un u.b. di  $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

The diagram shows a grid of elements  $e_{n,m}$  for  $n, m \in \mathbb{N}$ . The grid is organized into rows and columns. Each row  $n$  contains elements  $e_{n,0}, e_{n,1}, e_{n,2}, \dots, e_{n,m}, \dots$ . Each column  $m$  contains elements  $e_{0,m}, e_{1,m}, e_{2,m}, \dots, e_{n,m}, \dots$ . A blue diagonal band runs from the bottom-left to the top-right, highlighting the elements  $e_{n,n}$  which form the sequence  $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . The elements in the grid are arranged in a way that suggests a partial order, with  $e_{n,m} \sqsubseteq e_{k,k}$  when  $n \leq k$  and  $m \leq k$ .

# Switch Lemma: recap

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{if} \quad n \leq n' \wedge m \leq m'$$

stesso insieme di upper bounds di

$$\left\{ \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} e_{k,k} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

Domini funzionali



# Spazio delle funzioni

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D)$$

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E) \quad \text{CPO}_\perp \Rightarrow [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}] = ( [D \rightarrow E] , \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} )$$

$$D \rightarrow E \triangleq \{ f \mid f : D \rightarrow E \}$$

$$[D \rightarrow E] \triangleq \{ f \mid f : D \rightarrow E , f \text{ continuous} \}$$

come ordiniamo le funzioni?

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{iff} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$



# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq 0 \qquad f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$f(1) = 0 \not\sqsubseteq_{\mathbb{Z}_\perp} 1 = g(1)$$

le funzioni totali in  $\mathbb{Z}_\perp$  non sono comparabili

(a meno che non siano uguali)

ogni funzione totale è massima in  $\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$

# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{if } x = \perp \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g$$



# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_{\perp} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x) \triangleq \begin{cases} 0 & x \text{ pari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_{\perp} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}]} g$$



# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_{\perp} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} x! & 1 \leq x \leq 10 \\ \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x) \triangleq \begin{cases} x! & 1 \leq x \leq 15 \\ \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_{\perp} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}]} g$$



# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x, y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x, y) \triangleq \begin{cases} (x * y)^2 & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g$$



# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x, y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x, y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ 0 & x = \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g$$

si (come funzioni)

ma  $g$  e' continua?

$$g(\perp, \perp) = 0 \qquad g(1, 1) = 1$$

non e' neanche monotona!

# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, x) \qquad f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq (x, x)$$





# Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, x) \qquad f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq (x, \perp_{\mathbb{Z}_\perp})$$



$$f(0) = (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, 0) \not\sqsubseteq_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (0, \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) = g(0)$$



# CPO Funzionali

$$[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}] = ( [D \rightarrow E] , \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} )$$

e' un ordinamento parziale?

riflessività, antisimmetria, transitività di  $\sqsubseteq_{[D \rightarrow E]}$   
seguono immediatamente da quelli di  $\sqsubseteq_E$

c'e' un elemento bottom?

sia  $\perp_{[D \rightarrow E]} = \lambda d. \perp_E$

prendiamo una funzione  $f \in [D \rightarrow E]$

prendiamo  $d \in D$  abbiamo che  $\perp_{[D \rightarrow E]} d = \perp_E \sqsubseteq_E f(d)$

# CPO Funzionali (con.)

$$[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}] = ( [D \rightarrow E] , \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} )$$

e' completo?

prima mostriamo che qualsiasi catena di funzioni monotone (non necessariamente continue) ha un limite in  $D \rightarrow E$

poi dimostreremo che il limite in  $D \rightarrow E$  di una qualsiasi catena di funzioni continue è anche continuo

# CPO Funzionali (con.)

$\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$  una catena di funzioni monotone  
(non necessariamente continue)

proviamo che il suo lub e'  $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$

$$\text{cioe' } h(d) \triangleq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$$

Come lo dimostriamo? Dimostrando che la funzione  $h$

1. è un limite superiore della catena
2. è minore o uguale di ogni altro upper bound

# CPO Funzionali (con.)

prendiamo una catena

$$\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$$

(monotone ma non  
necessariamente continue)

1.  $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$  e' un upper bound della catena

prendiamo qls  $n \in \mathbb{N}$

per ogni  $d \in D$   $f_n(d) \sqsubseteq_E \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d) = h(d)$

percio'  $f_n \sqsubseteq_{D \rightarrow E} h$

# CPO Funzionali (con.)

prendiamo una catena  
 $\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$  (funzioni non necessariamente continue)

2.  $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$  è il minimo tra tutti gli upper bound

prendiamo  $g$  tale che  $\forall n. f_n \sqsubseteq_{D \rightarrow E} g$

vogliamo provare  $h \sqsubseteq_{D \rightarrow E} g$

prendiamo  $d \in D$   $\forall n. f_n(d) \sqsubseteq_E g(d)$

quindi  $g(d)$  è un u.b. di  $\{f_n(d)\}_{n \in \mathbb{N}}$

e perciò  $h(d) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d) \sqsubseteq_E g(d)$

# CPO Funzionali (con.)

TH.

prendiamo una catena  $\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$  di funzioni continue

allora  $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$  è continua

*prova.* sia  $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una catena in  $D$   
proviamo  $h \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i)$

$$\begin{aligned} h \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) && \text{per def di } h \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_n(d_i) && \text{per continuita' di } f_n \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d_i) && \text{se potessimo... (applicabile?)} \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i) && \text{per def di } h \end{aligned}$$

# CPO Funzionali (con.)

se  $n \leq m \wedge i \leq j$  allora  $f_n(d_i) \sqsubseteq_E f_m(d_j)$  ? 

$\Downarrow$

$$f_n \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} f_m \wedge d_i \sqsubseteq d_j$$

$$f_n(d_i) \sqsubseteq_E f_n(d_j) \sqsubseteq_E f_m(d_j)$$

$$\begin{array}{c} f_n \\ \text{monotona} \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ f_n \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} f_m \end{array}$$

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_n(d_i)$$



$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d_i) \quad \text{per switch lemma (applicabile?)}$$



# CPO Funzionali (con.)

**TH.**  $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}] = ( [D \rightarrow E] , \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} )$  e' completo

*prova.* prendiamo una catena  $\{f_n : [D \rightarrow E]\}_{n \in \mathbb{N}}$

$h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$  è un lub in  $D \rightarrow E$   
è continuo  $h \in [D \rightarrow E]$

dal momento che  $[D \rightarrow E] \subseteq D \rightarrow E$

$h$  è il lub in  $[D \rightarrow E]$



# CPO Funzionali (con.)

$$[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}] = ( [D \rightarrow E] , \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} )$$

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{iff} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$\perp_{[D \rightarrow E]} \triangleq \lambda d. \perp_E$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$$

$$f \in [D \rightarrow E], g \in [E \rightarrow F] \quad \Rightarrow \quad g \circ f \in [D \rightarrow F]$$

la composizione di funzioni continue è continua