

Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Domini Funzionali-8.3

Switch Lemma

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$e_{0,0}$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \dots$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{0,m} \sqsubseteq \cdots$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

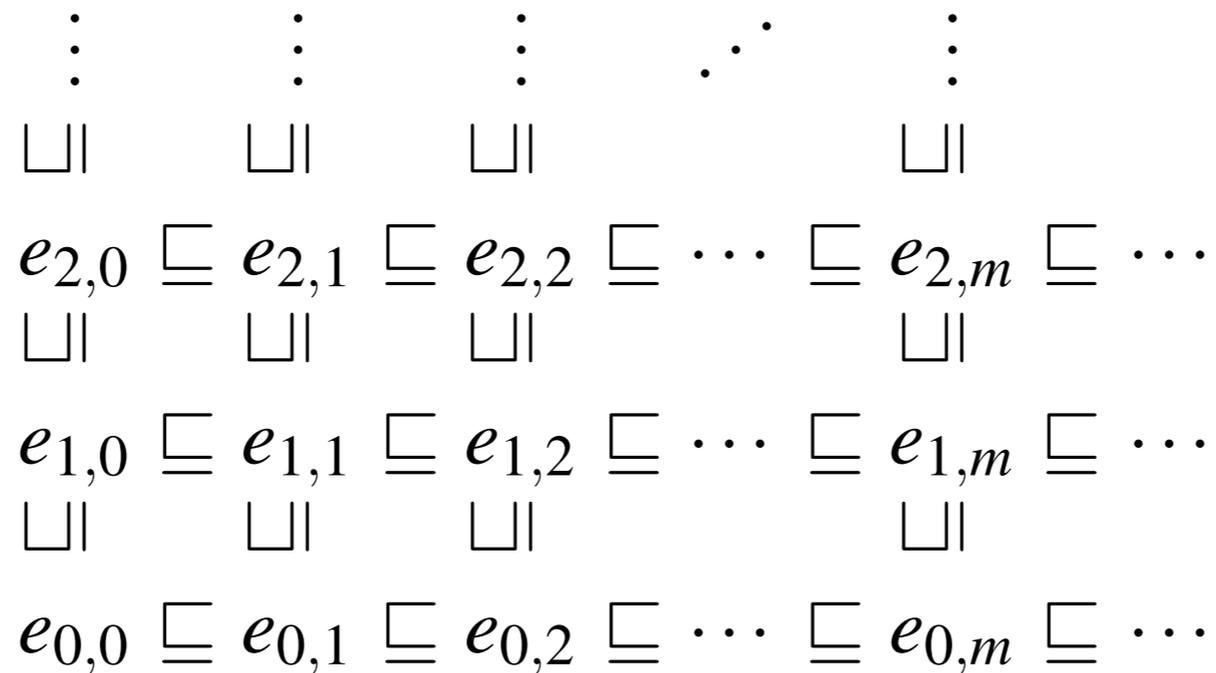
$$\begin{array}{ccccccccccc} e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\ \sqcup & & \sqcup & & \sqcup & & & & \sqcup & & \\ e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots \end{array}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

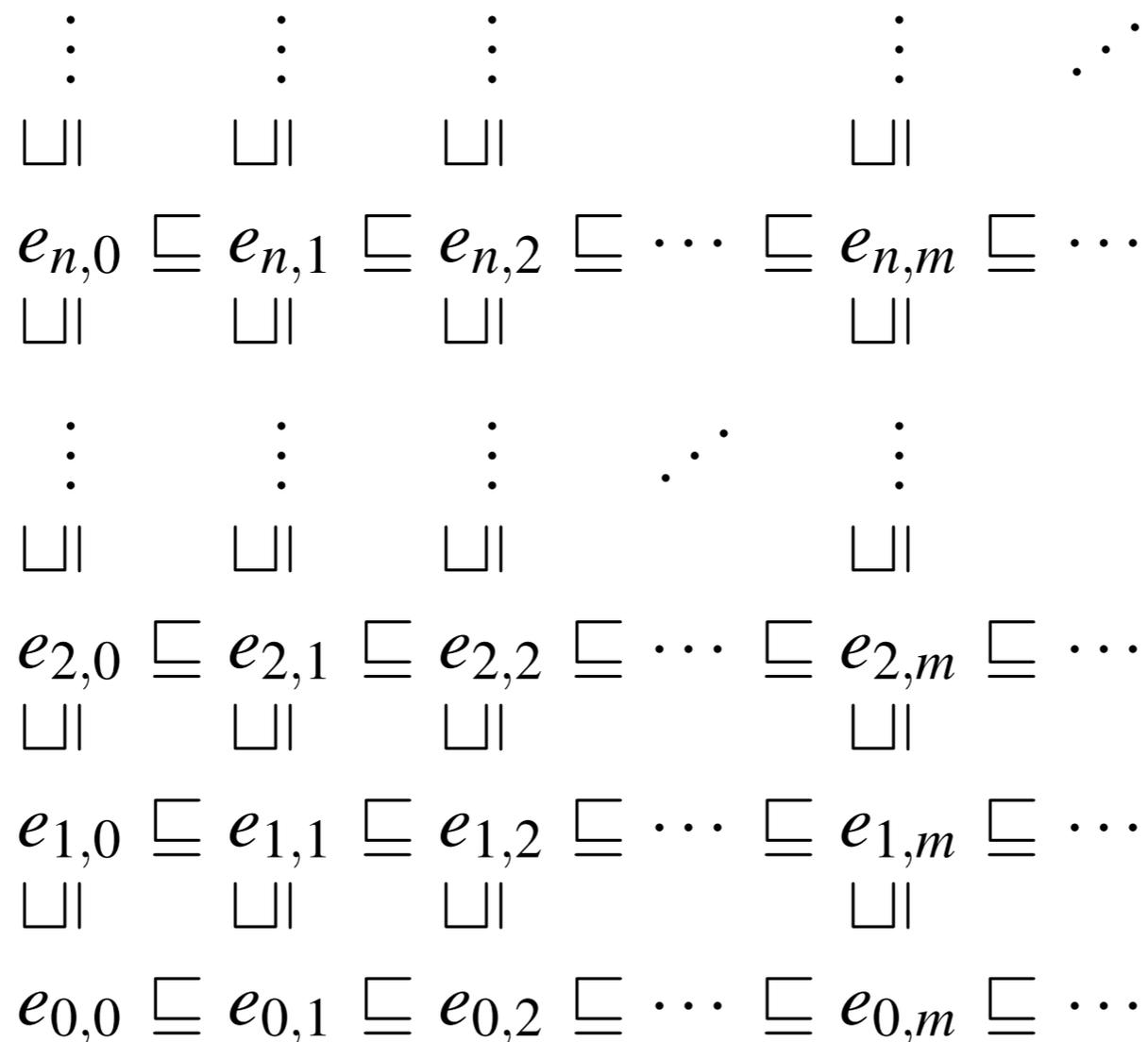


Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$



Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \text{ CPO}$$

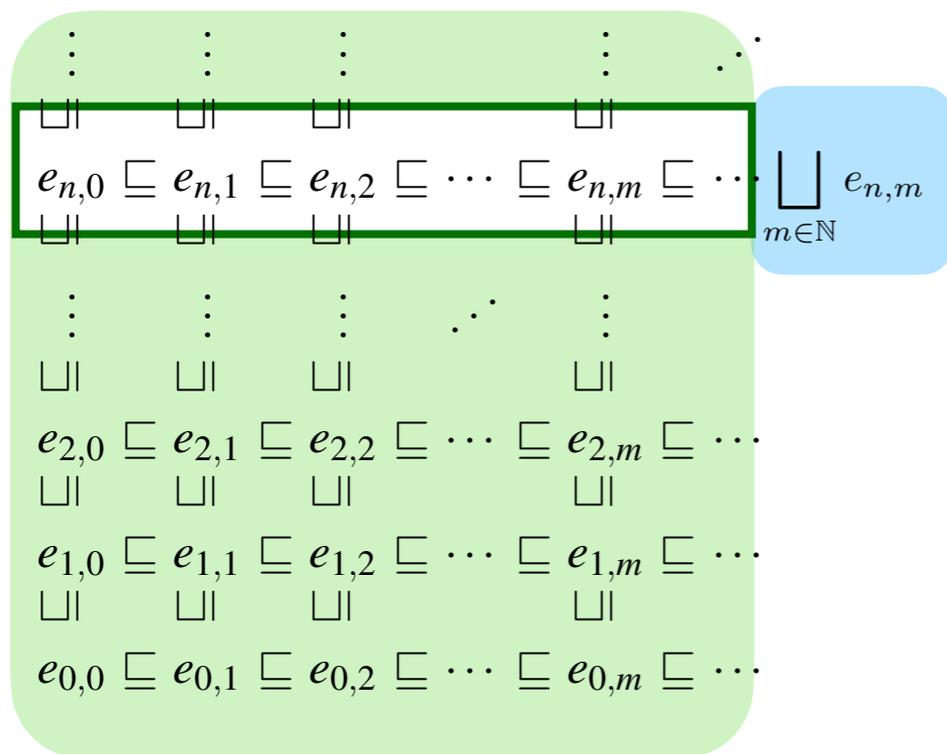
un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato n l'insieme $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

forma una catena (una riga nella figura)

che ha un lub (E e' un CPO)



$$\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

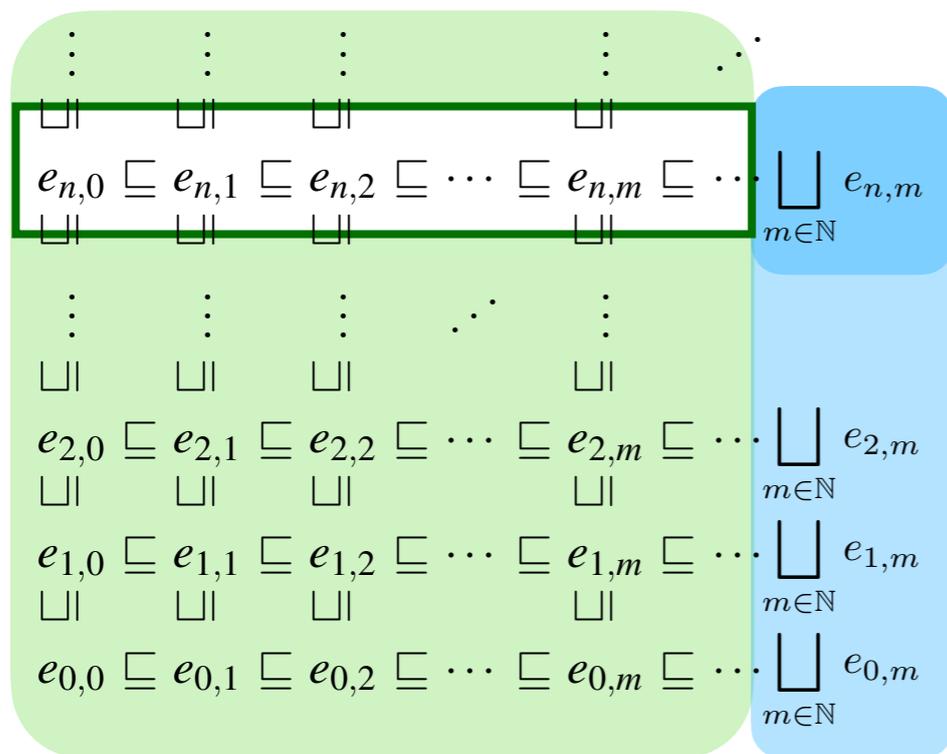
un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato n l'insieme $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

forma una catena (una riga nella figura)

che ha un lub (E è un CPO)



$$\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

formiamo la catena di tutti lub delle righe

$$\left\{ \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \text{ CPO}$$

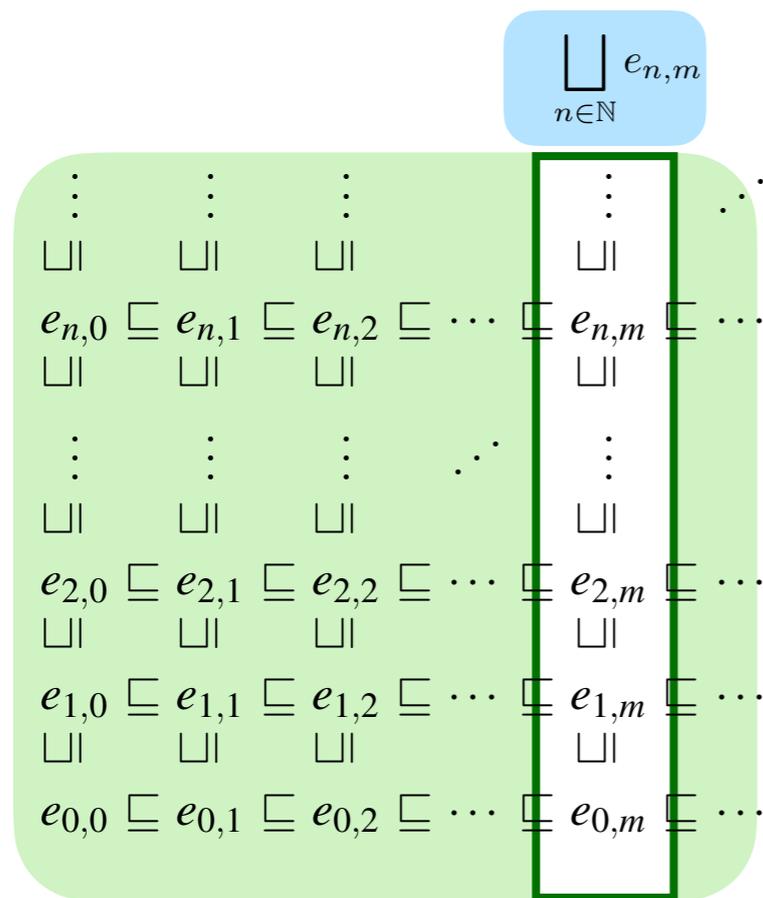
un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato m l'insieme $\{e_{n,m}\}_{n \in \mathbb{N}}$

forma una catena (una colonna nella figura)

che ha un lub (E e' un CPO)



$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

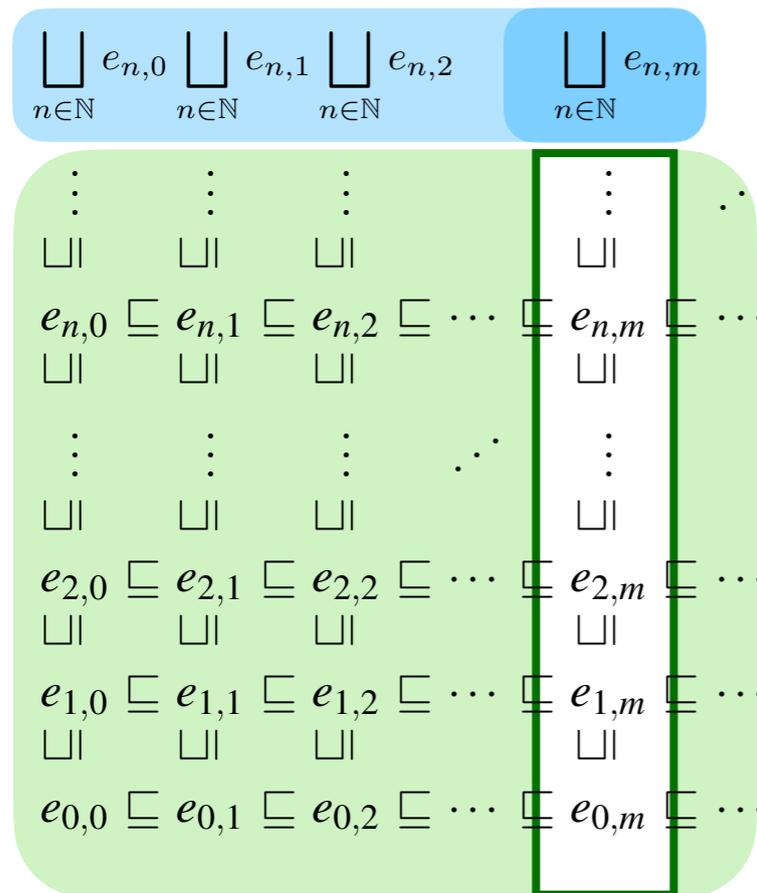
Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato n l'insieme $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$



forma una catena (una colonna nella figura)

e quindi ha lub (E e' un CPO)

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

formiamo la catena di tutti lub delle colonne

$$\left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

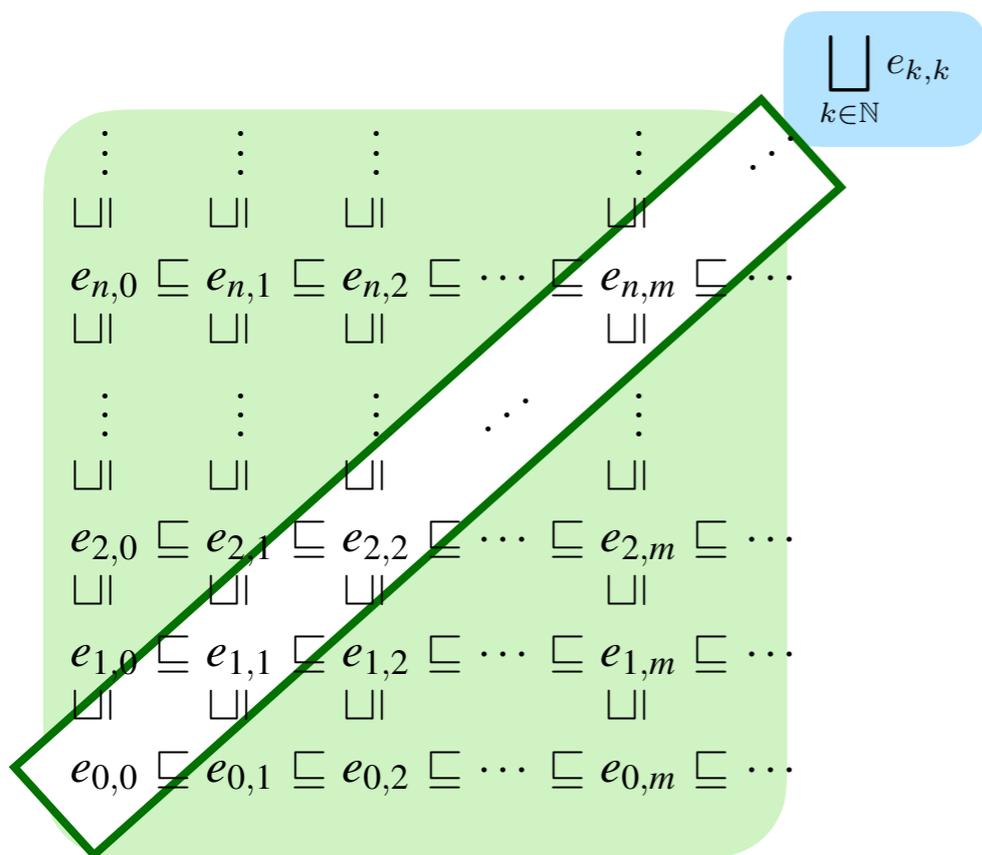
un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{se } n \leq n' \wedge m \leq m'$$

gli elementi diagonali $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

formano un catena

che ha lub (E è un CPO)



$$\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} e_{k,k}$$

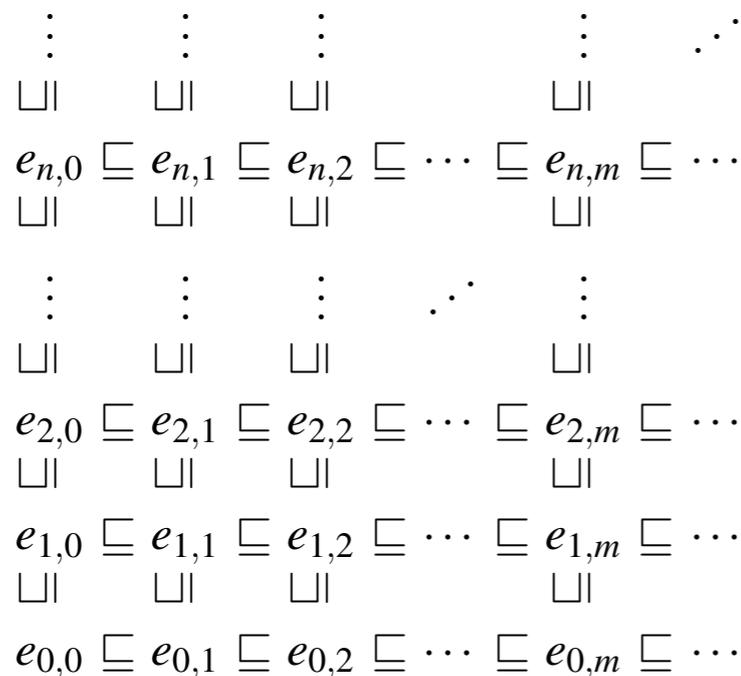
Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{se } n \leq n' \wedge m \leq m'$$

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$



proviamo che

tutti questi insiemi hanno
gli stessi u.b.

e quindi lo stesso lub

$$\left\{ \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} e_{k,k} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

$$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

(i)

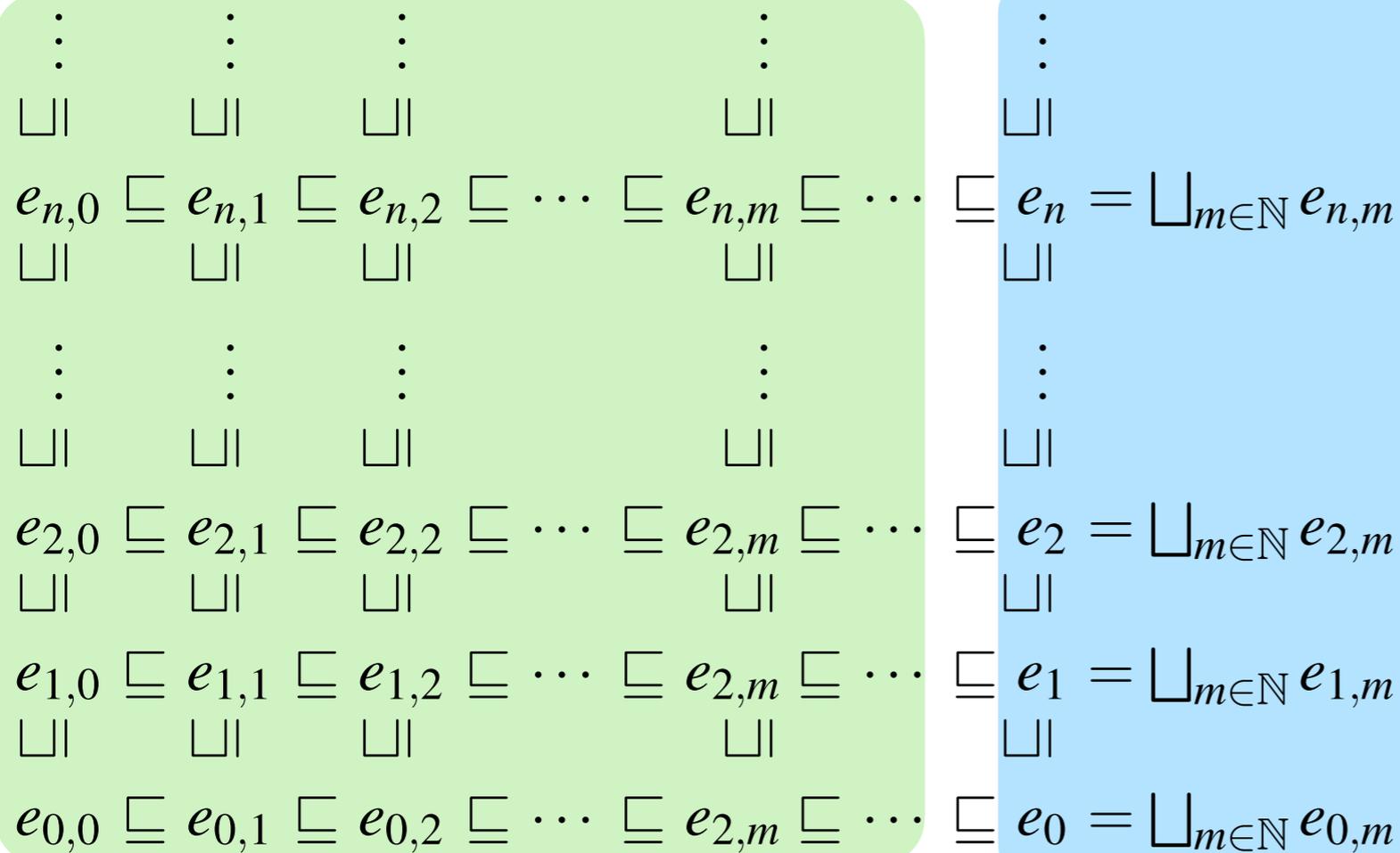
$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

ha gli stessi u.b. di

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove

$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$



(i)

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

stesso u.b. di

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove
$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

1. prendiamo un u.b. e di $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

e

prendiamo un indice di riga n

$$\begin{array}{cccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\
e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \dots & \sqsubseteq & e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} & \\
\sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\
e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \dots & \sqsubseteq & e_2 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{2,m} & \\
\sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\
e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \dots & \sqsubseteq & e_1 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{1,m} & \\
\sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\
e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \dots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \dots & \sqsubseteq & e_0 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{0,m} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\sqcup \\
e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \\
\sqcup \\
\vdots \\
\sqcup \\
e_2 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{2,m} \\
\sqcup \\
\vdots \\
\sqcup \\
e_1 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{1,m} \\
\sqcup \\
\vdots \\
\sqcup \\
e_0 = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{0,m}
\end{array}$$

proviamo $e_n \sqsubseteq e$

$$\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

una riga la matrice

e è un u.b. di $\{e_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \text{ è un lub}$$

perciò $e_n \sqsubseteq e$

(i)

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

stesso u.b. di

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove
$$e_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

2. prendiamo un u.b. e di $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

e

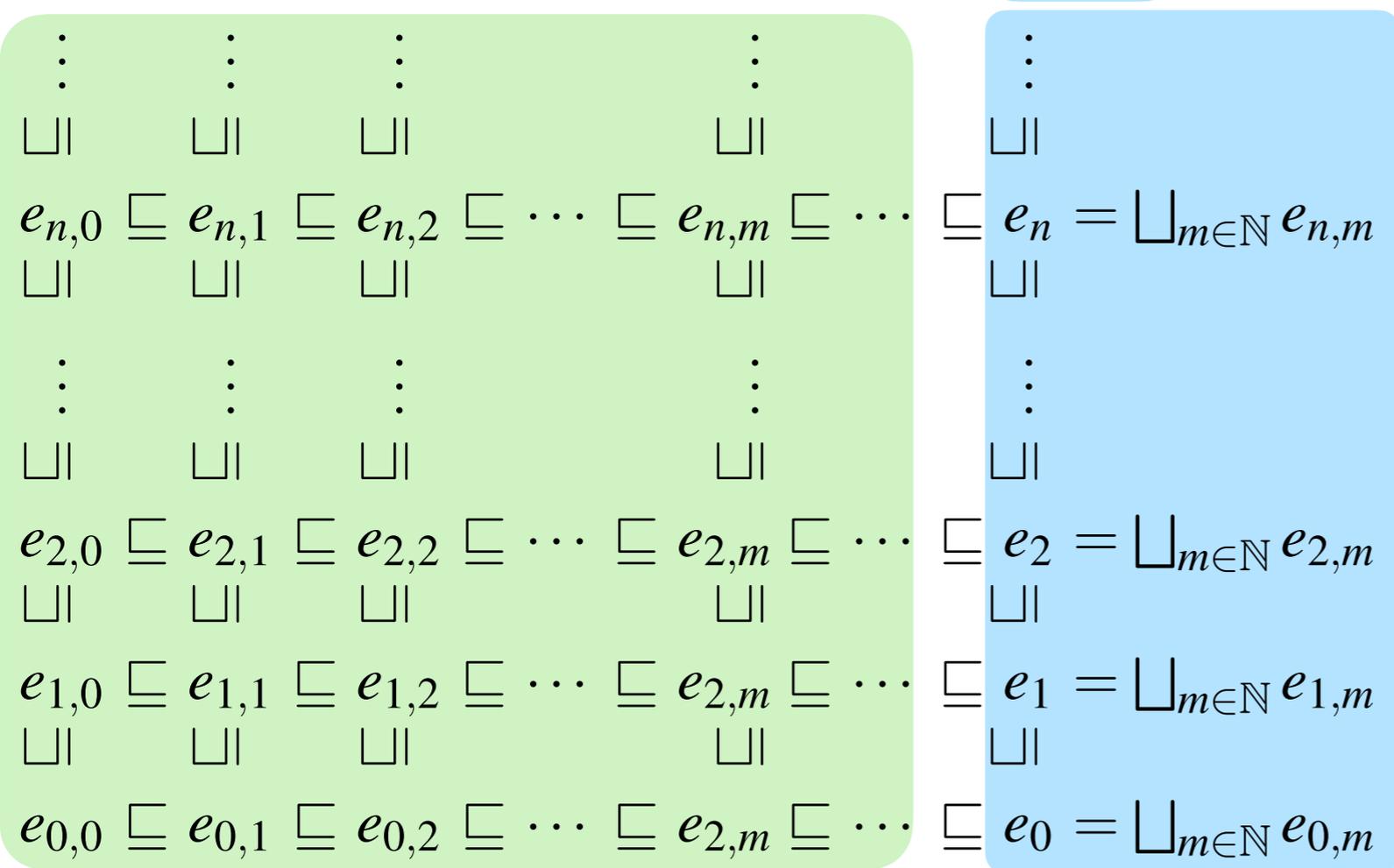
prendiamo indici n, m

proviamo $e_{n,m} \sqsubseteq e$

$$e_{n,m} \sqsubseteq \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} = e_n \sqsubseteq e$$

un elemento della riga

il lub di quella riga



(ii)

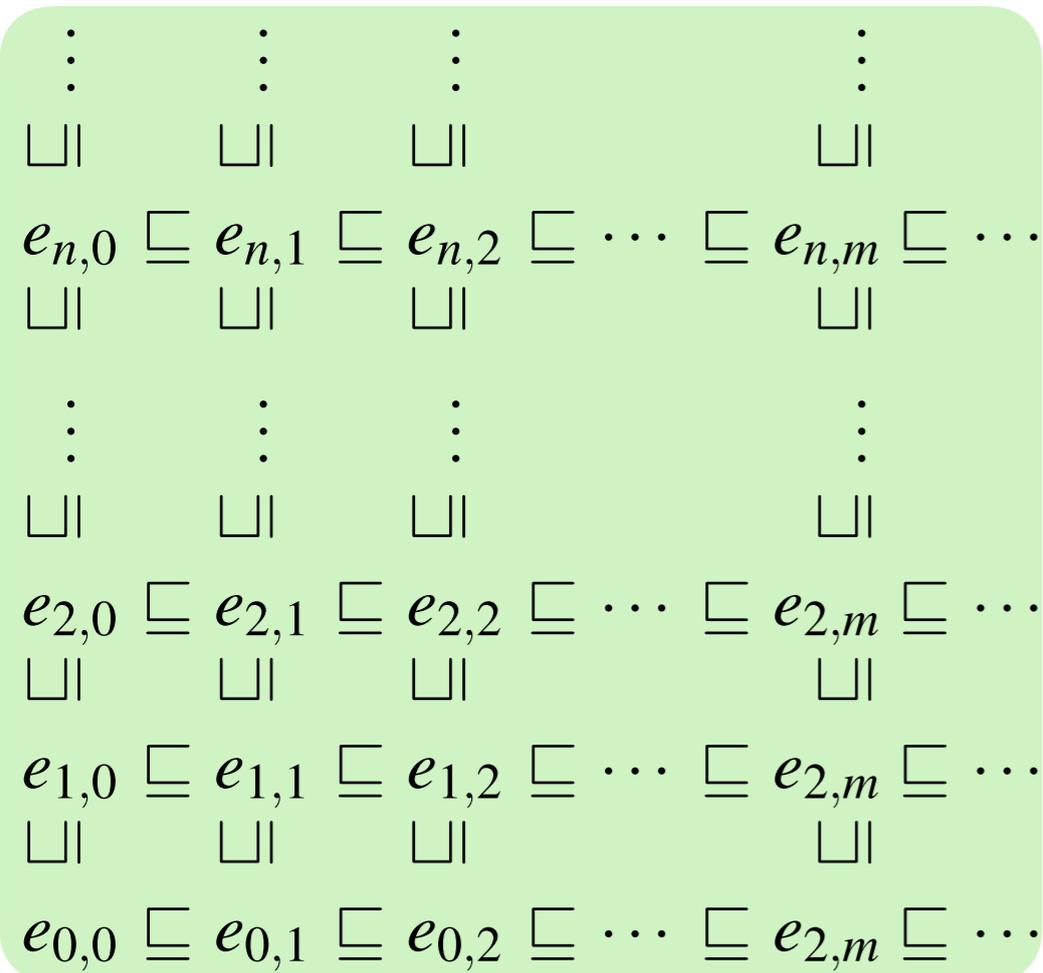
$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

stesso u.b. di

$$\left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

la prova è analoga alla precedente
(ragioniamo per colonne, non per righe)

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,0} \quad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,1} \quad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,2} \quad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$



(iii)

$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

stesso u.b. di

$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

1. prendiamo un u.b. e di $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

e

ma questo è immediato, perché

$$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

la diagonale

l'intera matrice

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ e_{n,0} \sqsubseteq e_{n,1} \sqsubseteq e_{n,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{n,m} \sqsubseteq \cdots \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ e_{2,0} \sqsubseteq e_{2,1} \sqsubseteq e_{2,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ e_{1,0} \sqsubseteq e_{1,1} \sqsubseteq e_{1,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots \\ \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{2,m} \sqsubseteq \cdots \end{array}$$

(iii)

$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

stesso u.b. di

$\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

2. prendiamo un u.b. e di $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

e

prendiamo gli indici n, m

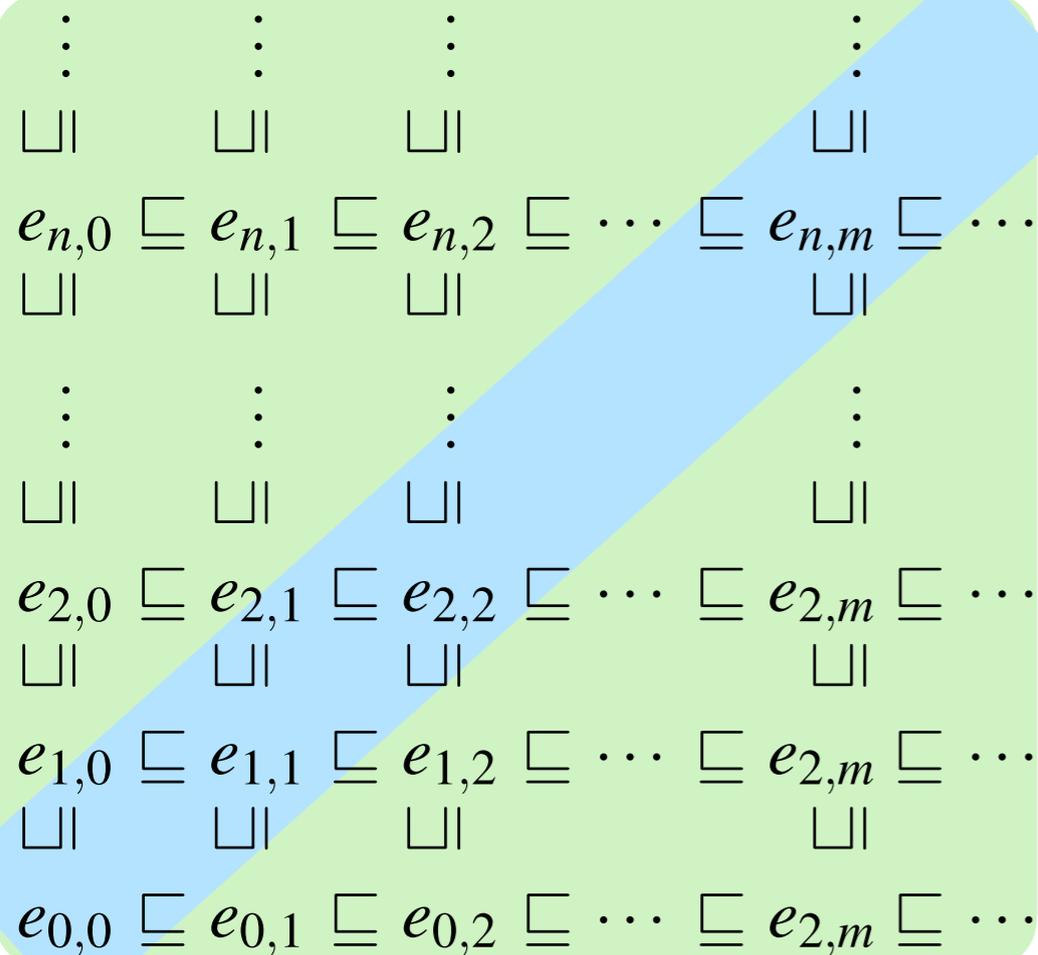
proviamo $e_{n,m} \sqsubseteq e$

sia $k = \max\{n, m\}$

$e_{n,m} \sqsubseteq e_{k,k} \sqsubseteq e$

$n \leq k \wedge m \leq k$

e è un u.b. di $\{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$



Switch Lemma: recap

$$\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{if} \quad n \leq n' \wedge m \leq m'$$

stesso insieme di upper bounds di

$$\left\{ \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \{e_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \left\{ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} e_{n,m} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} e_{k,k} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} e_{n,m}$$

Domini funzionali

Spazio delle funzioni

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D)$$

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E) \quad \text{CPO}_\perp \Rightarrow [D \rightarrow \mathcal{E}] = ([D \rightarrow E] , \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]})$$

$$D \rightarrow E \triangleq \{ f \mid f : D \rightarrow E \}$$

$$[D \rightarrow E] \triangleq \{ f \mid f : D \rightarrow E , f \text{ continuous} \}$$

come ordiniamo le funzioni?

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{iff} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq 0 \quad f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g \quad g(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$f(1) = 0 \not\sqsubseteq_{\mathbb{Z}_\perp} 1 = g(1)$$

le funzioni totali in \mathbb{Z}_\perp non sono comparabili

(a meno che non siano uguali)

ogni funzione totale è massima in $\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g$$



Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_{\perp} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x) \triangleq \begin{cases} 0 & x \text{ pari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_{\perp} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}]} g$$



Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} x! & 1 \leq x \leq 10 \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x) \triangleq \begin{cases} x! & 1 \leq x \leq 15 \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g$$



Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x, y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x, y) \triangleq \begin{cases} (x * y)^2 & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g$$



Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x, y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x, y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ 0 & x = \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp]} g$$

si (come funzioni)

ma g e' continua?

$$g(\perp, \perp) = 0 \quad g(1, 1) = 1$$

non e' neanche monotona!

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, x) \qquad f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq (x, x)$$



Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, x) \qquad f \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq (x, \perp_{\mathbb{Z}_\perp})$$



$$f(0) = (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, 0) \not\sqsubseteq_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (0, \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) = g(0)$$

CPO Funzionali

$$[D \rightarrow \mathcal{E}] = ([D \rightarrow E], \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]})$$

e' un ordinamento parziale?

riflessività, antisimmetria, transitività di $\sqsubseteq_{[D \rightarrow E]}$
seguono immediatamente da quelli di \sqsubseteq_E

c'e' un elemento bottom?

sia $\perp_{[D \rightarrow E]} = \lambda d. \perp_E$

prendiamo una funzione $f \in [D \rightarrow E]$

prendiamo $d \in D$ abbiamo che $\perp_{[D \rightarrow E]} d = \perp_E \sqsubseteq_E f(d)$

CPO Funzionali (con.)

$$[D \rightarrow \mathcal{E}] = ([D \rightarrow E] , \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]})$$

e' completo?

prima mostriamo che qualsiasi catena di funzioni monotone (non necessariamente continue) ha un limite in $D \rightarrow E$

poi dimostreremo che il limite in $D \rightarrow E$ di una qualsiasi catena di funzioni continue è anche continuo

CPO Funzionali (con.)

$\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di funzioni monotone
(non necessariamente continue)

proviamo che il suo lub e' $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$

cioe' $h(d) \triangleq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$

Come lo dimostriamo? Dimostrando che la funzione h

1. è un limite superiore della catena
2. è minore o uguale di ogni altro upper bound

CPO Funzionali (con.)

prendiamo una catena

$$\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$$

(monotone ma non necessariamente continue)

1. $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$ e' un upper bound della catena

prendiamo qls $n \in \mathbb{N}$

per ogni $d \in D$ $f_n(d) \sqsubseteq_E \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d) = h(d)$

percio' $f_n \sqsubseteq_{D \rightarrow E} h$

CPO Funzionali (con.)

prendiamo una catena

$\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$ (funzioni non necessariamente continue)

2. $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$ è il minimo tra tutti gli upper bound

prendiamo g tale che $\forall n. f_n \sqsubseteq_{D \rightarrow E} g$

vogliamo provare $h \sqsubseteq_{D \rightarrow E} g$

prendiamo $d \in D$ $\forall n. f_n(d) \sqsubseteq_E g(d)$

quindi $g(d)$ è un u.b. di $\{f_n(d)\}_{n \in \mathbb{N}}$

e perciò $h(d) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d) \sqsubseteq_E g(d)$

CPO Funzionali (con.)

TH.

prendiamo una catena $\{f_n : D \rightarrow E\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni continue

allora $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$ è continua

prova. sia $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una catena in D

proviamo $h \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i)$

$$h \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right)$$

per def di h

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_n(d_i)$$

per continuita' di f_n

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d_i)$$

se potessimo... (applicabile?)

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i)$$

per def di h

CPO Funzionali (con.)

se $n \leq m \wedge i \leq j$ allora $f_n(d_i) \sqsubseteq_E f_m(d_j)$? 

\Downarrow

$$f_n \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} f_m \wedge d_i \sqsubseteq d_j$$

$$f_n(d_i) \sqsubseteq_E f_n(d_j) \sqsubseteq_E f_m(d_j)$$

f_n

monotona $f_n \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} f_m$

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_n(d_i)$$



$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d_i) \text{ per switch lemma (applicabile?)}$$

CPO Funzionali (con.)

TH. $[D \rightarrow \mathcal{E}] = ([D \rightarrow E], \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]})$ e' completo

prova. prendiamo una catena $\{f_n : [D \rightarrow E]\}_{n \in \mathbb{N}}$

$h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$ è un lub in $D \rightarrow E$
è continuo $h \in [D \rightarrow E]$

dal momento che $[D \rightarrow E] \subseteq D \rightarrow E$

h è il lub in $[D \rightarrow E]$

CPO Funzionali (con.)

$$[D \rightarrow E] = ([D \rightarrow E], \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]})$$

$$f \sqsubseteq_{[D \rightarrow E]} g \quad \text{iff} \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$\perp_{[D \rightarrow E]} \triangleq \lambda d. \perp_E$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$$

$$f \in [D \rightarrow E], g \in [E \rightarrow F] \quad \Rightarrow \quad g \circ f \in [D \rightarrow F]$$

la composizione di funzioni continue è continua