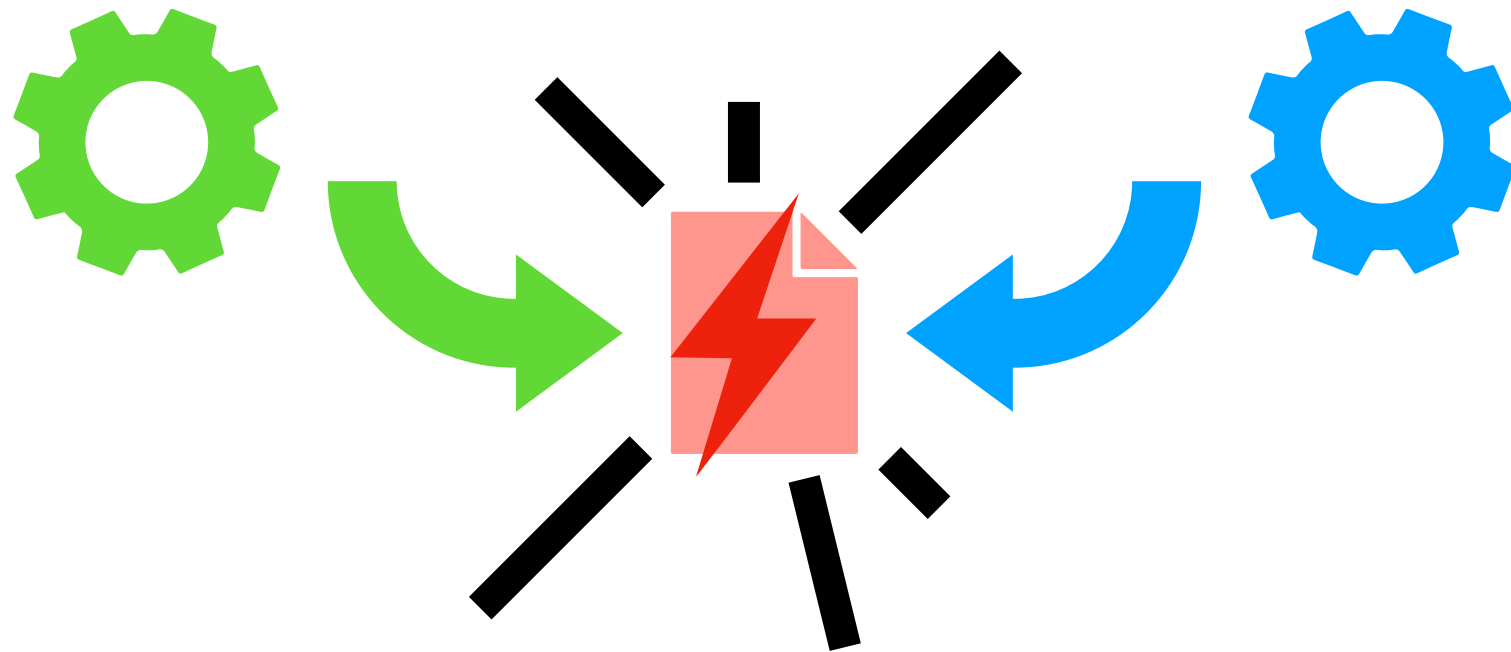


Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

Domini Cartesiani-8.2

HOFL

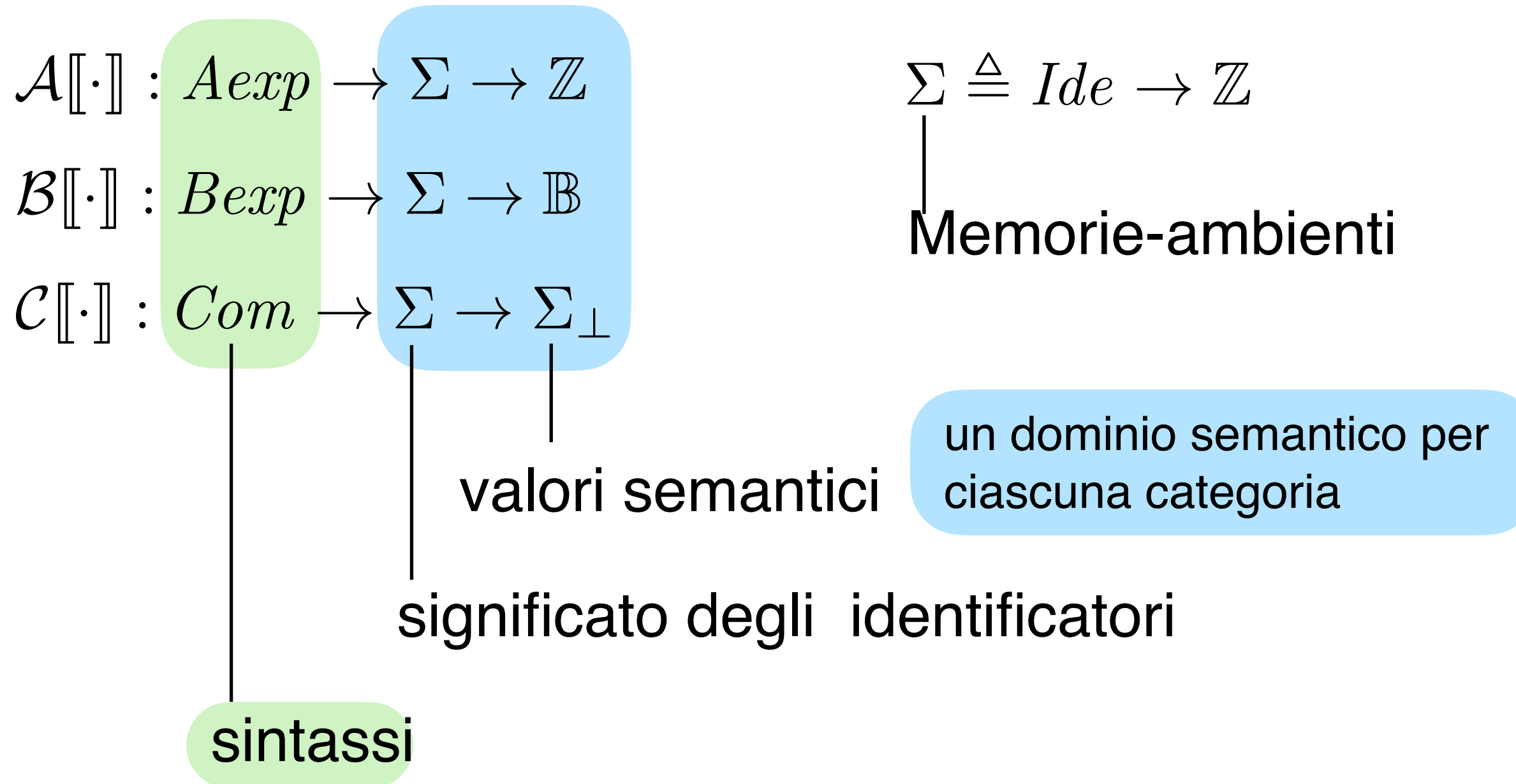
Verso una semantica denotazionale

Imp

3 categorie sintattiche (tipi)

$Aexp, Bexp, Com$

una funzione di interpretazione per ciascuno



HOF L

una categoria sintattica per i pretermini T

infiniti tipi $\tau ::= int \mid \tau_0 * \tau_1 \mid \tau_0 \rightarrow \tau_1$

infinita insiemi di termini tipabili T_τ

un dominio semantico per ciascun tipo D_τ

una funzione di interpretazione parametrica $\llbracket \cdot \rrbracket$

le variabili hanno tipi diversi $x : \tau$

L'ambiente ρ deve tener conto dei tipi

Requisiti

$t : \tau$ $\llbracket t \rrbracket \rho \in D_\tau$ un dominio per ogni tipo!

ambiente

$$\rho : Var \rightarrow \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$$

tipo coerente con
l'assegnazione di
valori alle variabili

$$x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$$

t puo' divergere (es. `rec x. x`) $\Rightarrow D_\tau$ deve includere l'elemento bottom $\perp_{D_\tau}$

Requisiti

$t : \tau$ $\llbracket t \rrbracket \rho \in D_\tau$ — un dominio per ogni tipo!

/
ambiente

$$\rho : Var \rightarrow \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$$

tipo coerente con
l'assegnazione di
valori alle variabili

$$x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$$

$$\llbracket \mathbf{rec} \ x. \ t \rrbracket \rho = \llbracket t \rrbracket \rho[\llbracket \mathbf{rec} \ x. \ t \rrbracket \rho / x]$$

$$\Gamma_{x,t} \triangleq \lambda d. \llbracket t \rrbracket \rho[d / x]$$

$$\llbracket \mathbf{rec} \ x. \ t \rrbracket \rho = \Gamma_{x,t} (\llbracket \mathbf{rec} \ x. \ t \rrbracket \rho)$$

per risolvere equazioni ricorsive:

$$\llbracket \mathbf{rec} \ x. \ t \rrbracket = \text{fix } \Gamma_{x,t}$$

D_τ deve essere $\text{CPO}_\perp$

$\Gamma_{x,t}$ deve essere continua

Requisiti

un dominio per ogni tipo!

$t : \tau$

$\llbracket t \rrbracket \rho \in D_\tau$

ambiente

$$\rho : Var \rightarrow \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$$

tipo coerente con
l'assegnazione di
valori alle variabili

$$x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$$

$$\tau ::= int \mid \tau_0 * \tau_1 \mid \tau_0 \rightarrow \tau_1$$

dobbiamo essere in grado di combinare $\text{CPO}_\perp$

usando il prodotto cartesiano e gli spazi funzionali

Requisiti

un dominio per ogni tipo!

$t : \tau$

$\llbracket t \rrbracket \rho \in D_\tau$

ambiente

$\rho : Var \rightarrow \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} D_\tau$

tipo coerente con
l'assegnazione di
valori alle variabili

$x : \tau \Rightarrow \rho(x) \in D_\tau$

$\tau ::= int \quad | \quad \tau_0 * \tau_1 \quad | \quad \tau_0 \rightarrow \tau_1$

scegliamo D_{int}

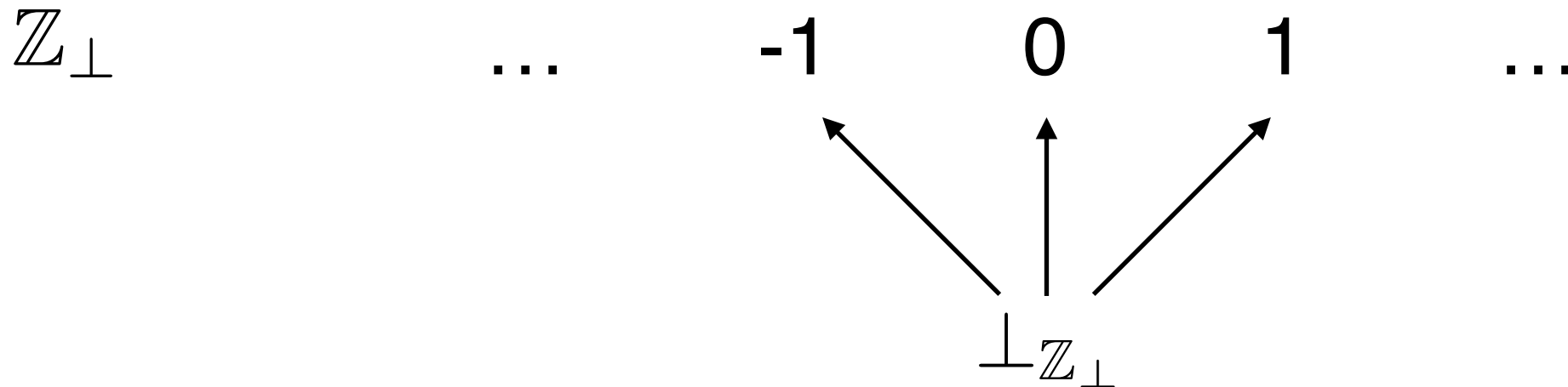
dato D_{τ_0}, D_{τ_1} costruiamo $D_{\tau_0 * \tau_1} \quad D_{\tau_0 \rightarrow \tau_1}$

Il dominio flat degli Interi

Dominio per gli interi: $\mathbb{Z}$ flat

$\mathbb{Z}$... -1 0 1 ...

Dominio per gli interi: $\mathbb{Z}$ flat



PO: ordine flat

bottom: qualsiasi ordine piatto ha il bottom

completezza: qualsiasi ordine piatto è completo
(sono possibili solo catene finite)

Estensioni strict delle operazioni aritmetiche

$$\text{op} \in \{+, -, \times\}$$

$$\text{op} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\underline{\text{op}}_{\perp} : \mathbb{Z}_{\perp} \times \mathbb{Z}_{\perp} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}$$

$$1 \underline{+}_{\perp} \perp = \perp$$

$$\perp \underline{\times}_{\perp} 5 = \perp$$

$$\perp \underline{=}_{\perp} \perp = \perp$$

$$v_1 \underline{\text{op}}_{\perp} v_2 \triangleq \begin{cases} v_1 \underline{\text{op}} v_2 & \text{if } v_1, v_2 \in \mathbb{Z} \\ \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} & \text{otherwise } (v_1 = \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}} \text{ or } v_2 = \perp_{\mathbb{Z}_{\perp}}) \end{cases}$$

chiamate estensioni *strict*

da dimostrare: $\underline{\text{op}}_{\perp}$ e' monotono e continuo

Dominio per le coppie

Dato $\mathbb{Z}_\perp$,
e' $\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$ un $\text{CPO}_\perp$?

In generale dati due $\text{CPO}_\perp$ il dominio delle coppie
e' un $\text{CPO}_\perp$?

Domini di prodotti cartesiani

Prodotto cartesiano

$$\begin{array}{ll} \mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D) & \text{CPO}_\perp \\ \mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E) & \text{CPO}_\perp \end{array} \Rightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{E} = (D \times E, \sqsubseteq_{D \times E})$$

come sono ordinate le coppie?

$$(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D \times E} (d_1, e_1) \quad \text{iff} \quad d_0 \sqsubseteq_D d_1 \wedge e_0 \sqsubseteq_E e_1$$

esempio $\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$

$$(0, 1) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (1, 2)$$



$$(\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, 1) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (1, 1)$$



$$(2, \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (2, 0)$$



$$(0, \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) \stackrel{?}{\sqsubseteq}_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, 0)$$



CPO cartesiano

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (D \times E , \sqsubseteq_{D \times E})$$

e' un ordine parziale?

riflessività, antisimmetria, transitività di $\sqsubseteq_{D \times E}$
seguono immediatamente da quelle di $\sqsubseteq_D \quad \sqsubseteq_E$

ha l'elemento bottom?

sia $\perp_{D \times E} = (\perp_D, \perp_E)$

consideriamo ogni coppia $(d, e) \in D \times E$

dal momento che $\perp_D \sqsubseteq_D d$
 $\perp_E \sqsubseteq_E e$ allora $\perp_{D \times E} = (\perp_D, \perp_E) \sqsubseteq_{D \times E} (d, e)$

CPO cartesiano (con.)

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (D \times E , \sqsubseteq_{D \times E})$$

e' completo?

consideriamo

una catena $\{(d_i, e_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ dobbiamo trovare il suo lub

proviamo che il suo lub e' $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$

1. e' un upper bound della catena
2. è minore o uguale di qualsiasi altro upper bound

CPO cartesiano (con.)

$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (D \times E , \sqsubseteq_{D \times E})$ consideriamo una catena $\{(d_i, e_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$

1. $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$ e' un upper bound della catena

prendiamo un elemento della catena (d_j, e_j)

abbiamo $d_j \sqsubseteq_D \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$ quindi $(d_j, e_j) \sqsubseteq_{D \times E} \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$
 $e_j \sqsubseteq_E \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i$

CPO cartesiano (con.)

$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (D \times E , \sqsubseteq_{D \times E})$ prendiamo una catena $\{(d_i, e_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$

2. $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$ e' il piu' piccolo tra gli upper bounds

prendiamo un upper bound generico (d, e) : $\forall i \in \mathbb{N}. (d_i, e_i) \sqsubseteq_{D \times E} (d, e)$

per def $\forall i \in \mathbb{N}. d_i \sqsubseteq_D d \wedge \forall i \in \mathbb{N}. e_i \sqsubseteq_E e$

ovvero d e' un upper bound di $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $\Rightarrow$ $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \sqsubseteq_D d$
 e e' un upper bound di $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $\Rightarrow$ $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \sqsubseteq_E e$

quindi $\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right) \sqsubseteq_{D \times E} (d, e)$

Cartesiano CPO: recap

$$\mathcal{D} \times \mathcal{E} = (D \times E , \sqsubseteq_{D \times E})$$

$$(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D \times E} (d_1, e_1) \quad \text{iff} \quad d_0 \sqsubseteq_D d_1 \wedge e_0 \sqsubseteq_E e_1$$

$$\perp_{D \times E} \triangleq (\perp_D, \perp_E)$$

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (d_i, e_i) \triangleq \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right)$$

is $\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$ a $\text{CPO}_\perp$?



Le operazioni sono continue?

$$\pi_1 : D \times E \rightarrow D$$

$$\pi_1(d, e) = d$$

$$\pi_2 : D \times E \rightarrow E$$

$$\pi_2(d, e) = e$$

TH. le proiezioni sono monotone

prova. prendiamo $(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D \times E} (d_1, e_1)$

vogliamo provare $\pi_1(d_0, e_0) \sqsubseteq_D \pi_1(d_1, e_1)$

$$\pi_2(d_0, e_0) \sqsubseteq_E \pi_2(d_1, e_1)$$

$$\pi_1(d_0, e_0) = d_0 \sqsubseteq_D d_1 = \pi_1(d_1, e_1)$$

$\uparrow$

$$(d_0, e_0) \sqsubseteq_{D \times E} (d_1, e_1)$$

il caso di π_2 e' analogo

Proiezioni (con.)

$$\pi_1 : D \times E \rightarrow D$$

$$\pi_1(d, e) = d$$

$$\pi_2 : D \times E \rightarrow E$$

$$\pi_2(d, e) = e$$

TH. proiezioni sono continue

prova. prendiamo $\{(d_i, e_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare $\pi_1 \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (d_i, e_i) \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_1(d_i, e_i)$

$$\pi_1 \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (d_i, e_i) \right) = \pi_1 \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i, \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_1(d_i, e_i)$$

per def
di lub

per def
di π_1

per def
di π_1

il caso di π_2 e' analogo

Esercizio: smashed prod

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D)$$

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E) \quad \text{CPO}_\perp \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} \otimes \mathcal{E} = (D \otimes E, \sqsubseteq_{D \otimes E})$$

$$D \otimes E \triangleq \{(d, e) \mid (d, e) \in D \times E, d = \perp_D \Leftrightarrow e = \perp_E\}$$

come ordiniamo le coppie?

elemento bottom?

e' un ordine completo?