



Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Operatore delle conseguenze immediate- 5.3

Riassunto

Teorema di Kleene

$$p \triangleq f(p)$$

una definizione ricorsiva
esiste un tale p ?
esiste un p minimo?

se $f : D \rightarrow D$ continua D OPC $_{\perp}$

allora $p \triangleq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp_D)$

scritto anche $fix(f)$

Il nostro problema

$$\mathcal{C}[\cdot] : \text{Com} \rightarrow \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \cup \{\perp\}$$

$$\mathcal{C}[\text{while } \underset{\square}{b} \text{ do } \underset{\square}{c}] \sigma \underset{\square}{=} \begin{cases} \sigma & \text{if } \neg \mathcal{B}[b] \sigma \\ \mathcal{C}[\text{while } b \text{ do } c](\mathcal{C}[c] \sigma) & \text{otherwise} \end{cases}$$

p f(p)

Funzione 91 di McCarthy

$$f = M f$$

$$(\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), \sqsubseteq)$$

$$\perp = \emptyset$$

OPC_{\perp}

$$M f n = \begin{cases} n - 10 & \text{se } n > 100 \\ f(f(n + 11)) & \text{se } n \leq 100 \text{ e } f(n + 11) \downarrow \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

M monotona?

$$f \sqsubseteq g \stackrel{?}{\Rightarrow} M(f) \sqsubseteq M(g)$$

M continua?

$$M \left(\bigsqcup_i f_i \right) \stackrel{?}{\sqsubseteq} \bigsqcup_i M(f_i)$$

Funzione 91 di McCarthy

$$M f n = \begin{cases} n - 10 & \text{se } n > 100 \\ f(f(n + 11)) & \text{se } n \leq 100 \text{ e } f(n + 11) \downarrow \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

M monotona? 

assumiamo $f \sqsubseteq g$ e proviamo $M(f) \sqsubseteq M(g)$

prendiamo $(n, m) \in M(f)$

proviamo $(n, m) \in M(g)$

se $n > 100$

$m = n - 10$ e $(n, n - 10) \in M(g)$

se $n \leq 100$

$m = f(f(n + 11))$

quindi $\exists k. \{(n + 11, k), (k, m)\} \in f \subseteq g$
e $(n, m) \in M(g)$

Funzione 91 di McCarthy

$$M f n = \begin{cases} n - 10 & \text{se } n > 100 \\ f(f(n + 11)) & \text{se } n \leq 100 \text{ e } f(n + 11) \downarrow \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

M continua? 

$$M \left(\bigsqcup_i f_i \right) \stackrel{?}{\subseteq} \bigsqcup_i M(f_i)$$

consideriamo $f \triangleq \bigsqcup_i f_i$

prendiamo $(n, m) \in M(f)$

proviamo $(n, m) \in \bigsqcup_i M(f_i)$

se $n > 100$ $m = n - 10$ $(n, n - 10) \in M(f_1) \subseteq \bigsqcup_i M(f_i)$

se $n \leq 100$ $m = f(f(n + 11))$

quindi $\exists k. \{(n + 11, k), (k, m)\} \in f$

quindi $\exists j_1, j_2. (n + 11, k) \in f_{j_1}, (k, m) \in f_{j_2}$

prendiamo $j \triangleq \max\{j_1, j_2\}$ $\{(n + 11, k), (k, m)\} \in f_j$

e $(n, m) \in M(f_j) \subseteq \bigsqcup_i M(f_i)$

Funzione 91 di McCarthy

$$f = M f$$

$$(\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), \sqsubseteq)$$

$$\perp = \emptyset$$

OPC $_{\perp}$

$$M f n = \begin{cases} n - 10 & \text{se } n > 100 \\ f(f(n + 11)) & \text{se } n \leq 100 \text{ e } f(n + 11) \downarrow \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\{(n + 11, k), (k, m)\} \in$$

$$M^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$M^1(\emptyset) = \{(n, n - 10) \mid n > 100\} = \{(101, 91), (102, 92), \dots, (111, 101), \dots\}$$

$$M^2(\emptyset) = \{(100, 91), (101, 91), (102, 92), \dots, (110, 100), \dots\}$$

$$M^3(\emptyset) = \{(99, 91), (100, 91), (101, 91), (102, 92), \dots\}$$

...

$$M^{11}(\emptyset) = \{(91, 91), (92, 91), \dots, (101, 91), (102, 92), \dots\}$$

...

$$M^{22}(\emptyset) = \{(80, 91), (81, 91), \dots, (101, 91), (102, 92), \dots\}$$

...

$$M^{102}(\emptyset) = \{(0, 91), (1, 91), \dots, (101, 91), (102, 92), \dots\}$$

raggiunto punto fisso! funzione totale

Visione alternativa

$$f = M f \quad (\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), \sqsubseteq) \quad \perp = \emptyset \quad \text{OPC}_\perp$$

$$M f n = \begin{cases} n - 10 & \text{se } n > 100 \\ f(f(n + 11)) & \text{se } n \leq 100 \text{ e } f(n + 11) \downarrow \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

formula: $(n, m) \in f$
o solo (n, m) per brevità

$$R_M \triangleq \left\{ \frac{}{(n, n - 10)} \quad n > 100 \quad , \quad \frac{(n + 11, k) \quad (k, m)}{(n, m)} \quad n \leq 100 \right\}$$

$$f(n) = m \quad \Leftrightarrow \quad (n, m) \in I_{R_M}$$

(insieme di teoremi in R_M)

Operatore delle Conseguenze Immediate (OCI)

Operatore delle Conseguenze immediate

F un insieme di formule

$(\wp(F), \subseteq) \text{ CPO}_\perp$

Operatore

R un sistema logico

(con alcune restrizioni)

$\hat{R} : \wp(F) \rightarrow \wp(F)$

Conseguenze
Immedieate

$$\hat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

\hat{R} applica le regole ai fatti in S in tutti i modi possibili

$\hat{R}(S)$: tutte le conclusioni che possiamo trarre in un passo dalle ipotesi in S

dimostriamo che il minimo punto fisso di \hat{R} e' I_R

(insieme dei teoremi di R)

Esempio

Stringhe con parentesi bilanciate $F = \{s \in \mathcal{L} \mid s \in \{(,)\}^*\}$

$$R = \left\{ \frac{\epsilon \in \mathcal{L}}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{s \in \mathcal{L}}{(s) \in \mathcal{L}}, \frac{s_1 \in \mathcal{L} \quad s_2 \in \mathcal{L}}{s_1 s_2 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$S = \emptyset$$

$$\hat{R}(S) = \{ \epsilon \notin \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

Esempio

Stringhe con parentesi bilanciate $F = \{s \in \mathcal{L} \mid s \in \{(,)\}^*\}$

$$R = \left\{ \frac{\epsilon \in \mathcal{L}}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{s \in \mathcal{L}}{(s) \in \mathcal{L}}, \frac{s_1 \in \mathcal{L} \quad s_2 \in \mathcal{L}}{s_1 s_2 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$S = \{ \epsilon \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) = \{ \epsilon \in \mathcal{L}, () \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

Esempio

Stringhe con parentesi bilanciate $F = \{s \in \mathcal{L} \mid s \in \{(,)\}^*\}$

$$R = \left\{ \frac{\epsilon \in \mathcal{L}}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{s \in \mathcal{L}}{(s) \in \mathcal{L}}, \frac{s_1 \in \mathcal{L} \quad s_2 \in \mathcal{L}}{s_1 s_2 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$S = \{ () \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) = \{ \epsilon \in \mathcal{L}, (()) \in \mathcal{L}, ()() \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

Esempio

Stringhe con parentesi bilanciate $F = \{s \in \mathcal{L} \mid s \in \{(,)\}^*\}$

$$R = \left\{ \frac{\epsilon \in \mathcal{L}}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{s \in \mathcal{L}}{(s) \in \mathcal{L}}, \frac{s_1 \in \mathcal{L} \quad s_2 \in \mathcal{L}}{s_1 s_2 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$S = \{)(\in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) = \{ \epsilon \in \mathcal{L}, ()() \in \mathcal{L},)()(\in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

Esempio

Stringhe con parentesi bilanciate $F = \{s \in \mathcal{L} \mid s \in \{(,)\}^*\}$

$$R = \left\{ \frac{\epsilon \in \mathcal{L}}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{s \in \mathcal{L}}{(s) \in \mathcal{L}}, \frac{s_1 \in \mathcal{L} \quad s_2 \in \mathcal{L}}{s_1 s_2 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$S = \{)(\in \mathcal{L}, () \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) \equiv \{ \epsilon \in \mathcal{L}, ()() \in \mathcal{L}, (() \in \mathcal{L},)()(\in \mathcal{L},)(() \in \mathcal{L}, (()) \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$F = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$R = \left\{ \frac{\quad}{(0, 0)}, \frac{\quad}{(1, 1)}, \frac{(n, h) \quad (n+1, k)}{(n+2, h+k)} \right\}$$

$$S = \emptyset$$

$$\widehat{R}(S) = \{ (0, 0), (1, 1) \}$$

$$\widehat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

Esercizio

Pf(\mathbb{N}, \mathbb{N})

$$F = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$R = \left\{ \frac{(0, 0)}{(0, 0)}, \frac{(1, 1)}{(1, 1)}, \frac{(n, h) \quad (n+1, k)}{(n+2, h+k)} \right\}$$

$$S = \{(2, 1)\}$$

$$\hat{R}(S) = \{(0, 0), (1, 1)\}$$

$$\hat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

Esercizio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$F = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$R = \left\{ \overline{(0, 0)}, \overline{(1, 1)}, \overline{\frac{(n, h) \quad (n+1, k)}{(n+2, h+k)}} \right\}$$

$$S = \{(5, 5), (6, 8)\}$$

$$\widehat{R}(S) = \{?(0, 0), (1, 1), (7, 13)\}$$

$$\widehat{R}(S) \triangleq \left\{ y \mid \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R. \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S \right\}$$

OCI e' monotono

TH. \hat{R} e' monotono

prova. Prendiamo $S_1 \subseteq S_2$

vogliamo provare $\hat{R}(S_1) \subseteq \hat{R}(S_2)$

prendiamo $y \in \hat{R}(S_1)$ vogliamo provare $y \in \hat{R}(S_2)$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \\ \exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R \text{ con } \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S_1 & & \Downarrow S_1 \subseteq S_2 \\ & & \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S_2 \\ & & \Downarrow \\ & & y \in \hat{R}(S_2) \end{array}$$

OCI e' continuo

TH. \hat{R} is continuo (sotto alcune ipotesi)

prova. Prendiamo $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una catena in $\wp(F)$

Vogliamo provare
$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}(S_i) = \hat{R} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}(S_i) \subseteq \hat{R} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$
 perche' \hat{R} e' monotona

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}(S_i) \supseteq \hat{R} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right) ?$$

OCI e' continuo (con.)

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}(S_i) \supseteq \hat{R}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right)$$

Prendiamo

$$y \in \hat{R}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) \text{ vogliamo provare } y \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}(S_i)$$

\Downarrow

$$\exists \frac{x_1 \dots x_n}{y} \in R \text{ con } \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

percio' $\forall j \in [1, n]. \exists k_j \in \mathbb{N}. x_j \in S_{k_j}$ prendiamo $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$

chiaramente $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S_k$

$$\text{quindi } y \in \hat{R}(S_k) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}(S_i)$$

possibile sse ogni regola
ha un numero finito di
premesse

Teoremi dimostrabili

I_R l'insieme di teoremi dimostrabili in R

I_R^n teoremi dimostrabili con una derivazione di altezza al max n

$$I_R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_R^n$$

dove

$$I_R^0 = \emptyset$$

$$I_R^{n+1} = I_R^n \cup \widehat{R}(I_R^n)$$

↑
↑
dimostrabili usando un passo in piu'

↑
teoremi dimostrabili con una derivazione di altezza al max n

Teoremi di altezza n

TH. Sia $P(n) \triangleq I_R^n = \widehat{R}^n(\emptyset) \quad \forall n \in \mathbb{N}. P(n)$

prova. per induzione matematica

$$P(0) \triangleq I_R^0 = \widehat{R}^0(\emptyset)$$

$$I_R^0 = \emptyset = \widehat{R}^0(\emptyset)$$

$\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \Rightarrow P(n+1)$ prendiamo un generico n
assumiamo $P(n) \triangleq I_R^n = \widehat{R}^n(\emptyset)$

vogliamo provare $P(n+1) \triangleq I_R^{n+1} = \widehat{R}^{n+1}(\emptyset)$

$$I_R^{n+1} = I_R^n \cup \widehat{R}(I_R^n)$$

per def

$$= \widehat{R}^n(\emptyset) \cup \widehat{R}(\widehat{R}^n(\emptyset))$$

per ipotesi induttiva

$$= \widehat{R}^n(\emptyset) \cup \widehat{R}^{n+1}(\emptyset)$$

per def

$$= \widehat{R}^{n+1}(\emptyset)$$

perche' $\widehat{R}^n(\emptyset) \subseteq \widehat{R}^{n+1}(\emptyset)$

Punto fisso di OCI

TH. $fix(\hat{R}) = I_R$ (sotto alcune ipotesi)

ogni regola deve avere
un numero finito di
premesse

prova.

per il th. di punto fisso di Kleene sappiamo che $fix(\hat{R})$ esiste

$$fix(\hat{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{R}^n(\emptyset) \quad \text{per def.}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_R^n \quad \text{per il risultato precedente}$$

$$= I_R \quad \text{per def}$$

Esempio

Stringhe con parentesi bilanciate

$$F = \{s \in \mathcal{L} \mid s \in \{(,)\}^*\}$$

$$R = \left\{ \frac{\epsilon \in \mathcal{L}}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{s \in \mathcal{L}}{(s) \in \mathcal{L}}, \frac{s_1 \in \mathcal{L} \quad s_2 \in \mathcal{L}}{s_1 s_2 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\hat{R}^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$\hat{R}^1(\emptyset) = \{ \epsilon \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}^2(\emptyset) = \{ \epsilon \in \mathcal{L}, () \in \mathcal{L} \}$$

$$\hat{R}^3(\emptyset) = \{ \epsilon \in \mathcal{L}, () \in \mathcal{L}, (() \in \mathcal{L}, ()() \in \mathcal{L} \}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}^4(\emptyset) = \{ & \epsilon \in \mathcal{L}, () \in \mathcal{L}, (() \in \mathcal{L}, ()() \in \mathcal{L}, (((() \in \mathcal{L}, \\ & (()()) \in \mathcal{L}, ()(()) \in \mathcal{L}, (()()) \in \mathcal{L}, ()()() \in \mathcal{L}, \\ & (()())() \in \mathcal{L}, ()()() \in \mathcal{L}, (()()) \in \mathcal{L}, ()()()() \in \mathcal{L} \} \end{aligned}$$

Example

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$F = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$R = \left\{ \overline{(0, 0)}, \overline{(1, 1)}, \overline{\begin{matrix} (n, h) & (n+1, k) \\ (n+2, h+k) \end{matrix}} \right\}$$

$$\widehat{R}^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$\widehat{R}^1(\emptyset) = \{ (0, 0), (1, 1) \}$$

$$\widehat{R}^2(\emptyset) = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 1) \}$$

$$\widehat{R}^3(\emptyset) = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2) \}$$

$$\widehat{R}^4(\emptyset) = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3) \}$$

$$\widehat{R}^5(\emptyset) = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 5) \}$$

$$\widehat{R}^6(\emptyset) = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 5), (6, 8) \}$$