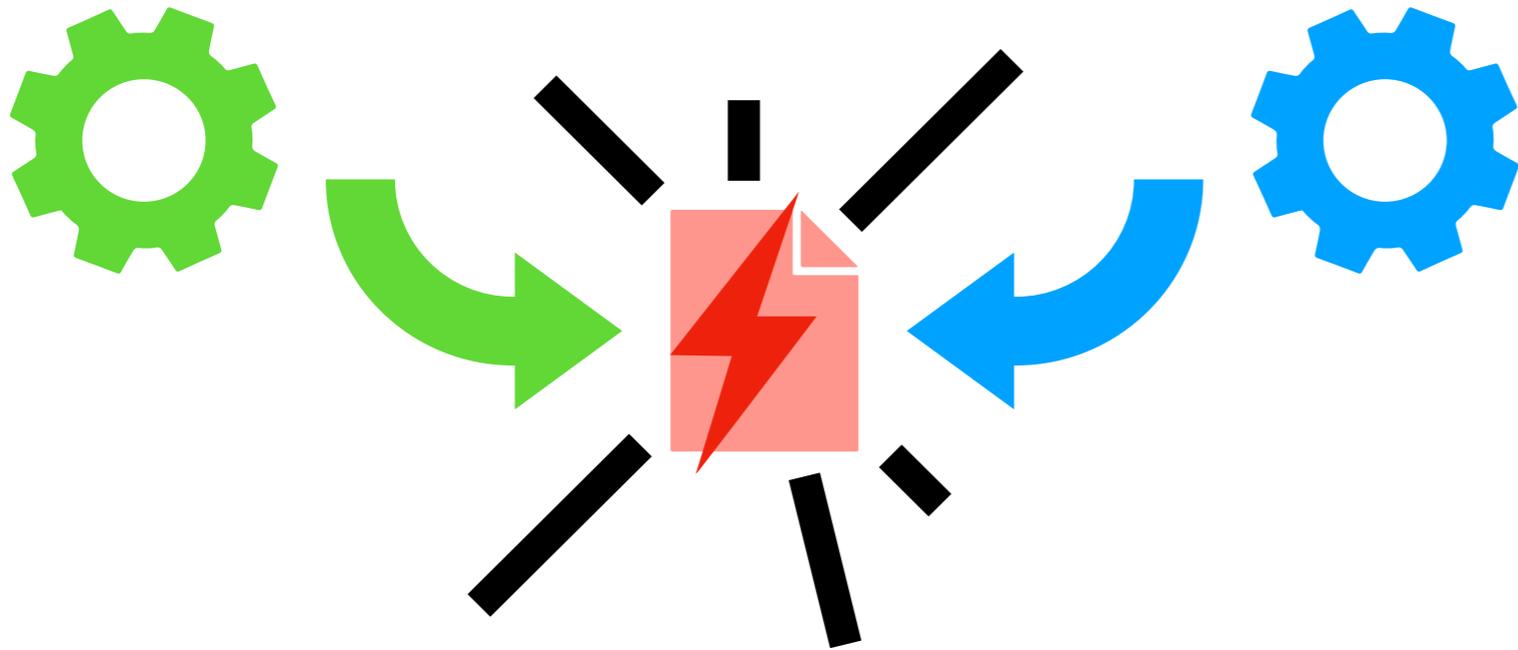


Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

Esercitazione #2

Induzione strutturale,
induzione sulle regole e divergenza

Ex.1 Completare la prova di terminazione delle espressioni booleane per induzione strutturale

$$b ::= v \mid a \text{ cmp } a \mid \neg b \mid b \text{ bop } b$$

$$P(b) \triangleq \forall \sigma. \exists u. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

Ex. 1, Terminazione di Bexp

$$P(b) \triangleq \forall \sigma. \exists u. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

Per induzione strutturale

$$\forall v \in \mathbb{B}. P(v)$$

$$\forall a_0, a_1. P(a_0 \text{ cmp } a_1)$$

$$\forall b. P(b) \Rightarrow P(\neg b)$$

$$\forall b_0, b_1. (P(b_0) \wedge P(b_1)) \Rightarrow P(b_0 \text{ bop } b_1)$$

} vedi Lezione 7

} da fare

Ex. 1, Terminazione di Bexp

$$P(b) \triangleq \forall \sigma. \exists u. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

per induzione strutturale

$\forall b. P(b) \Rightarrow P(\neg b)$ prendiamo un generico $b \in Bexp$

Assumiamo $P(b) \triangleq \forall \sigma. \exists w. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow w$

Vogliamo provare $P(\neg b) \triangleq \forall \sigma. \exists u. \langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow u$

prendiamo un generico σ

Consideriamo il goal $\langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow u \quad \swarrow_{u=\neg w} \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow w$

per ipotesi induttiva $P(b)$, tale w esiste

concludiamo prendendo $u = \neg w$

Ex. 1, Terminazione di Bexp

$$P(b) \triangleq \forall \sigma. \exists u. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

per induzione strutturale

$$\forall b_0, b_1. (P(b_0) \wedge P(b_1)) \Rightarrow P(b_0 \text{ bop } b_1) \quad \text{prendiamo generici } b_0, b_1 \in Bexp$$

$$\text{Assumiamo } P(b_i) \triangleq \forall \sigma. \exists u_i. \langle b_i, \sigma \rangle \longrightarrow u_i$$

$$\text{Vogliamo provare } P(b_0 \text{ bop } b_1) \triangleq \forall \sigma. \exists u. \langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

prendiamo un generico σ

$$\text{Consideriamo il goal } \langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

$$\swarrow_{u=u_0 \text{ bop } u_1} \langle b_0, \sigma \rangle \longrightarrow u_0, \langle b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u_1$$

per ipotesi induttiva $P(b_0)$ e $P(b_1)$ tali u_0 e u_1 esistono

concludiamo prendendo $u = u_0 \text{ bop } u_1$

[Ex. 2] Estendiamo la sintassi delle espressioni aritmetiche con l'operatore $a_0 \sqcap a_1$

la cui big-step semantica operativa è data dalla regola

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$

1. Provare la terminazione o esibire un contro-esempio
2. Provare il determinismo o esibire un contro-esempio

Ex. 2, terminazione

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$

$$\langle 1 \sqcap 2, \sigma \rangle \not\rightarrow$$

Ex. 2, determinismo

per induzione strutturale

$$\forall a_0, a_1. P(a_0) \wedge P(a_1) \Rightarrow P(a_0 \sqcap a_1)$$

Prendiamo un generico a_0, a_1

Assumiamo (per ipotesi induttiva)

$$P(a_i) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma, m_i, m'_i. \langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow m_i \wedge \langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow m'_i \Rightarrow m_i = m'_i$$

vogliamo provare

$$P(a_0 \sqcap a_1) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma, m, m'. \langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m \wedge \langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m' \Rightarrow m = m'$$

Prendiamo generici σ, m, m' tali che $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m$ and $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m'$

Vogliamo provare $m = m'$

Ex. 2, determinismo (con.)

Consideriamo il goal $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m$

Solo la regola
$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$
 e' applicabile

quindi $\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow m$ e $\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m$

Analogamente, dal momento che

$$\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m'$$

deve essere $\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow m'$ e $\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m'$

Per ipotesi induttiva, concludiamo $m = m'$

Ex. 2, determinismo

per induzione sulle regole

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$

Assumiamo (per ipotesi induttiva)

$$P(\langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow n) \stackrel{\Delta}{=} \forall n'. \langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

vogliamo provare

$$P(\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n) \stackrel{\Delta}{=} \forall n'. \langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

prendiamo n' tale che $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n'$

Vogliamo provare $n = n'$

Ex. 2, determinismo (con.)

$$P(\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n) \stackrel{\Delta}{=} \forall n'. \langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

$$P(\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n) \stackrel{\Delta}{=} \forall n'. \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

Consideriamo il goal $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n'$

Solo la regola
$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$
 e' applicabile

quindi $\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n'$ e $\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n'$

Per ipotesi induttiva, concludiamo $n = n'$

[Ex. 3] Estendiamo la sintassi delle espressioni aritmetiche con l'operatore $a_0 \sqcup a_1$ la cui big-step semantica operativa è data dalla regola

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n_0}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_0} \quad \frac{\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}$$

1. Provare la terminazione o esibire un contro-esempio
2. Provare il determinismo o esibire un contro-esempio

Ex. 3, terminazione

per induzione strutturale

$$\forall a_0, a_1. P(a_0) \wedge P(a_1) \Rightarrow P(a_0 \sqcup a_1)$$

Prendiamo un generico a_0, a_1

Assumiamo $P(a_0) \triangleq \forall \sigma. \exists m_0. \langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow m_0$

$$P(a_1) \triangleq \forall \sigma. \exists m_1. \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m_1$$

Vogliamo dimostrare $P(a_0 \sqcup a_1) \triangleq \forall \sigma. \exists m. \langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m$

Caso induttivo (con.)

Consideriamo un σ generico e prendiamo il goal $\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m$

Entrambe le regole $\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n_0}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_0}$ $\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}$ sono applicabili

Prendiamo la prima

$\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m \swarrow \langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow m$

Per ipotesi induttiva $P(a_0)$, esiste m_0 tale che $\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow m_0$
e abbiamo finito considerando ($m = m_0$)

Ex. 3, determinism

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n_0}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_0} \quad \frac{\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}$$

$$\langle 1 \sqcup 2, \sigma \rangle \longrightarrow 1 \quad \langle 1 \sqcup 2, \sigma \rangle \longrightarrow 2$$

$$1 \neq 2$$

[Ex. 4] Consideriamo il comando

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{while} \ x > y \ \mathbf{do} \ (x := x + 1 ; y := y - 1)$$

Trovare l'insieme S di memorie σ tali che $\langle w, \sigma \rangle \not\rightarrow$ e provare che queste rispettano la condizione usando la regola di inferenza per la divergenza

Ex. 4, divergenza

$w \triangleq \text{while } x > y \text{ do } \underbrace{(x := x + 1; y := y - 1)}_c$

consideriamo un generico σ

se $\sigma(x) \leq \sigma(y)$: $\langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma$

$S \triangleq \{\sigma \mid \sigma(x) > \sigma(y)\}$

- $\forall \sigma \in S. \langle x > y, \sigma \rangle \longrightarrow \text{tt}$ ✓
- $\forall \sigma \in S. \forall \sigma'. \langle x := x + 1; y := y - 1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \sigma' \in S$ ✓

infatti $\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' = \sigma[\sigma(x) + 1/x, \sigma(y) - 1/y]$

$\sigma'(x) = \sigma(x) + 1 > \sigma(y) + 1 > \sigma(y) - 1 = \sigma'(y)$ quindi $\sigma' \in S$

Percio', se $\sigma(x) > \sigma(y)$, allora $\langle w, \sigma \rangle \not\longrightarrow$

[Ex. 5] Provare il determinismo dell'espressione booleana
usando l'induzione sulle regole

$$P(\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u) \stackrel{\Delta}{=} \forall u'. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

$$\frac{}{\langle v, \sigma \rangle \longrightarrow v}$$

Dobbiamo provare
Consideriamo

u'

t.c.

$$P(\langle v, \sigma \rangle \longrightarrow v) \triangleq \forall u'. \langle v, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow v = u'$$

dobbiamo provare $v = u'$

consideriamo il goal

$$\langle v, \sigma \rangle \longrightarrow u'$$

deve essere

$$\swarrow_{u'=v} \square$$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \text{ cmp } a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_0 \text{ cmp } n_1}$$

assumiamo $\langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow n_i$

dobbiamo provare

Consideriamo u' t.c. $\langle a_0 \text{ cmp } a_1, \sigma \rangle \longrightarrow u'$

$$P(\langle a_0 \text{ cmp } a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_0 \text{ cmp } n_1) \triangleq \forall u'. \langle a_0 \text{ cmp } a_1, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow n_0 \text{ cmp } n_1 = u'$$

Dobbiamo provare $n_0 \text{ cmp } n_1 = u'$

Consideriamo il goal $\langle a_0 \text{ cmp } a_1, \sigma \rangle \longrightarrow u'$

deve essere che $\swarrow_{u' = m_0 \text{ cmp } m_1} \langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow m_0, \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m_1$

per la determinatezza di Aexp $n_0 = m_0$ e $n_1 = m_1$

perciò $n_0 \text{ cmp } n_1 = m_0 \text{ cmp } m_1 = u'$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

assumiamo $P(\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow v) \triangleq$
 $\forall w. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow w \Rightarrow v = w$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow v}{\langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow \neg v}$$

dobbiamo provare

$$P(\langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow \neg v) \triangleq \forall u'. \langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow \neg v = u'$$

Consideriamo u' t.c. $\langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow u'$

dobbiamo provare $\neg v = u'$

Consideriamo il goal $\langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow u'$

deve essere che $\swarrow_{u' = \neg w} \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow w$

Per ipotesi induttiva $v = w$

perciò $\neg v = \neg w = u'$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'. \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

$$\frac{\langle b_0, \sigma \rangle \longrightarrow v_0 \quad \langle b_1, \sigma \rangle \longrightarrow v_1}{\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma \rangle \longrightarrow v_0 \text{ bop } v_1}$$

assumiamo $P(\langle b_i, \sigma \rangle \longrightarrow v_i) \triangleq$
 $\forall u_i. \langle b_i, \sigma \rangle \longrightarrow u_i \Rightarrow v_i = u_i$

dobbiamo provare

$$P(\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma \rangle \longrightarrow v_0 \text{ bop } v_1) \triangleq \forall u'. \langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow v_0 \text{ bop } v_1 = u'$$

Consideriamo

u'

t.c.

$$\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u'$$

dobbiamo provare $v_0 \text{ bop } v_1 = u'$

Consideriamo il goal $\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u'$

deve essere che $\swarrow_{u' = u_0 \text{ bop } u_1} \langle b_0, \sigma \rangle \longrightarrow u_0, \langle b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u_1$

Per ipotesi induttiva $v_0 = u_0$ e $v_1 = u_1$

perciò $v_0 \text{ bop } v_1 = u_0 \text{ bop } u_1 = u'$

[Ex. 6] Sia b un'espressione booleana e un comando c . Considerate il comando

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{while } b \mathbf{ do } c$$

Provare per induzione sulle regole

$$\forall \sigma, \sigma'. \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathit{false}$$

Ex. 6, uscita dal loop

$w \stackrel{\text{def}}{=} \text{while } b \text{ do } c$

$\forall \sigma, \sigma'. \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

per induzione strutturale?

per induzione sulle regole?

$P(\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

il predicato “mecha” con le conclusioni di due sole regole

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$$
$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Ex. 6, uscita dal loop

$w \stackrel{\text{def}}{=} \text{while } b \text{ do } c$

$\forall \sigma, \sigma'. \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

per induzione sulle regole

$P(\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$$

assumiamo $\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

dobbiamo provare $P(\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma) \triangleq \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

immediato, per le assunzioni

Ex. 6, uscita dal loop

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \text{while } b \text{ do } c \quad \forall \sigma, \sigma'. \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

per induzione sulle regole

$$P(\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

assumiamo

$$\begin{aligned} \langle b, \sigma \rangle &\longrightarrow \mathbf{tt} \\ \langle c, \sigma \rangle &\longrightarrow \sigma'' \\ \langle w, \sigma'' \rangle &\longrightarrow \sigma' \end{aligned}$$

$$P(\langle w, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

dobbiamo provare

$$P(\langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

immediato, per ipotesi induttiva