RICERCA OPERATIVA - LM in Ingegneria Gestionale (a.a. 2025/26)

Nome: Cognome: Matricola:

1) La compagnia *VeneziaLinda* si occupa della raccolta dei rifiuti prodotti nei sei sestieri di Venezia, utilizzando una flotta di K vaporetti cargo identici, ciascuno dotato di capacità Q. La rete dei collegamenti è rappresentata da un grafo orientato completo $G = (N, A)$, con $N = \{0, 1, \ldots, 6\}$ e $A = \{(i, j) : i, j \in N,\ i \neq j\}$. E' noto il tempo di percorrenza t_{ij} associato a ogni arco $(i, j) \in A$.

Giornalmente, ogni vaporetto parte dal deposito centrale e rientra al deposito centrale, situato sull'isola della Giudecca e rappresentato nel grafo dal nodo 0.

Ogni sestiere $i \in \{1, \ldots, 6\}$ genera una quantità giornaliera di rifiuti pari a q_i, con $q_i < Q$. Pertanto, ciascun sestiere può essere servito mediante un'unica visita. Si assume che il servizio di raccolta presso un sestiere richieda un tempo trascurabile.

Si formuli in termini di modello *PLI* il problema di stabilire i percorsi giornalieri dei vaporetti in modo da soddisfare la domanda dei sei sestieri (ogni sestiere va visitato da un solo vaporetto, esattamente una volta), rispettando le capacità dei vaporetti. L'obiettivo è minimizzare il massimo tempo di completamento della raccolta di rifiuti da parte dei vaporetti, ossia il massimo tempo di servizio presso i sestieri, assumendo che ogni vaporetto parta dal nodo deposito al tempo 0. (*Suggerimento*: per formulare il problema, si utilizzino anche variabili di flusso, per rappresentare la quantità di rifiuti trasportata dai veicoli, e variabili temporali, per rappresentare il tempo di completamento del servizio ai nodi)

SVOLGIMENTO

Dati di input

- $N = \{0, 1, \ldots, 6\}$: insieme dei nodi (0 deposito, 1–6 sestieri)
- $A = \{(i, j) \in N \times N : i \neq j\}$: insieme degli archi
- $q_i > 0$: domanda del sestiere i, $\forall i \in \{0, \ldots, 6\}$
- $Q > 0$: capacità di un vaporetto
- $t_{ij} \geq 0$: tempo di percorrenza dell'arco $(i, j) \in A$

Variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'arco } (i,j) \text{ appartiene al percorso di un vaporetto} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in A$$

$$f_{ij} \geq 0 : \text{flusso di rifiuti lungo } (i,j), \forall (i,j) \in A$$

$$\tau_i \geq 0 : \text{tempo di completamento del servizio al nodo } i, \forall i \in \{0, \ldots, 6\}$$

$$\tau_0 \geq 0 : \text{stima per eccesso il massimo tempo di completamento della raccolta di rifiuti da parte dei vaporetti}$$

Funzione obiettivo

$$\min\ \tau_0 \tag{1}$$

Vincoli

- La variabile di soglia τ_0 stima per eccesso il tempo di completamento del servizio in ogni sestiere:

$$\tau_i \leq \tau_0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, 6\} \tag{2}$$

- Ogni sestiere deve essere visitato esattamente una volta:

$$\sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, 6\} \tag{3}$$

- Ogni vaporetto deve uscire dal nodo deposito e rientrarvi:

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0j} = \sum_{(j,0) \in A} x_{j0} = K \tag{4}$$

- Soddisfacimento della domanda espresso in termini di vincoli di conservazione del flusso:

$$\sum_{(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} f_{ji} = q_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,6\} \tag{5}$$

$$\sum_{(j,0)\in A} f_{j0} = \sum_{i=1}^{6} q_i \tag{6}$$

- Il flusso dei rifiuti può avvenire solo lungo gli archi percorsi dai vaporetti, rispettando la corrispondente capacità:

$$0 \le f_{ij} \le Q\, x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \tag{7}$$

- Vincoli temporali:

$$\tau_j \ge \tau_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) \qquad \forall (i,j) \in A, i \neq 0 \tag{8}$$

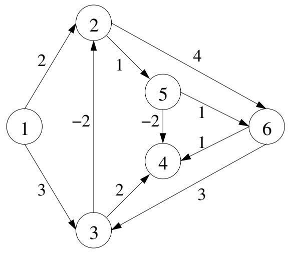
$$\tau_j \ge 0 + t_{0j} - M(1 - x_{0j}) \qquad \forall j \in N \setminus \{0\} \tag{9}$$

- Domini delle variabili:

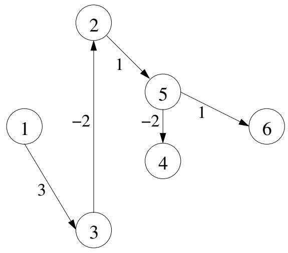
$$\begin{aligned} x_{ij} &\in \{0,1\} && \forall (i,j) \in A \\ f_{ij} &\ge 0 && \forall (i,j) \in A \\ \tau_i &\ge 0 && \forall i \in N \end{aligned}$$

Nei vincoli (8) e (9), M denota una costante sufficientemente elevata (ad esempio, $M = \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}$).

2) Si consideri il problema di determinare un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura. Si eseguano le prime quattro iterazioni (oltre al passo di inizializzazione) dell'algoritmo di Bellman, cioè dell'algoritmo SPT in cui l'insieme dei nodi candidati Q è implementato come una coda. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme Q, visitando gli archi della stella uscente di ogni nodo esaminato in ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)).



2.1) Si consideri quindi l'albero sotto riportato e si verifichi se esso sia una soluzione ottima del problema dato, utilizzando le condizioni di ottimalità del problema dei cammini minimi.



Giustificare tutte le risposte.

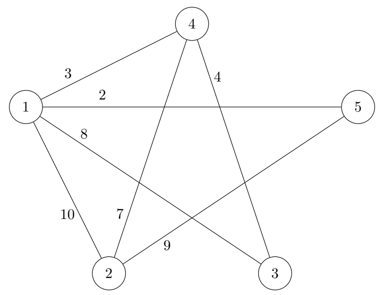
SVOLGIMENTO

Sia $M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 4 + 1 = 21$. Il passo di inizializzazione e le prime quattro iterazioni eseguite dall'algoritmo sono riportate nel seguito.

it.	u	$p[\cdot]$						$d[\cdot]$						Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	21	21	21	21	21	(1)
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	2	3	21	21	21	$(2,3)$
2	2	*nil*	1	1	1	2	2	0	2	3	21	3	6	$(3,5,6)$
3	3	*nil*	3	1	3	2	2	0	1	3	5	3	6	$(5,6,2,4)$
4	5	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	1	3	4	$(6,2,4)$

2.1) Sia d il vettore delle etichette associate ai nodi dell'albero in figura, indicato nel seguito mediante la notazione T. Si ha: $d(1) = 0$, $d(2) = 1$, $d(3) = 3$, $d(4) = 0$, $d(5) = 2$, $d(6) = 3$. L'albero è ottimo se e solo se valgono le condizioni di Bellman, ovvero se e solo se $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$, $\forall (i,j) \notin T$. Poiché tali condizioni sono verificate, segue che T è un albero dei cammini minimi di radice 1, ovvero è una soluzione ottima del problema dato.

3) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando MS1T (ovvero, determinando un 1-albero di copertura di costo minimo) come rilassamento e nessuna euristica. Per eseguire il branching, si selezioni un nodo con 3 archi incidenti nell'1-albero di copertura di costo minimo determinato (a parità di tale valore, quello con indice minimo), e si generino 3 figli fissando a zero la variabile corrispondente a uno di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda. Per ogni nodo dell'albero si riporti la soluzione ottenuta dal rilassamento, con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché. Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta in ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 24$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non è stata determinata una soluzione ammissibile. Pertanto $\underline{z} = 24 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a generare 3 figli, in cui si fissano a zero le variabili corrispondenti agli archi $(1, 3)$, $(1, 4)$ e $(1, 5)$, rispettivamente.

$\boxed{x_{13} = 0}$ Poiché il nodo 3 ha un solo arco incidente nel grafo ridotto, è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{14} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 30$, è mostrato in (b). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $30 < z = +\infty$, si pone $z = 30$. Il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{15} = 0}$ Poiché il nodo 5 ha un solo arco incidente nel grafo ridotto, è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo termina, restituendo la soluzione ottima in (b), di valore $z = 30$.