RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il vettore η_B, il passo di spostamento e l'indice uscente, giustificando le risposte. Al termine, in caso di ottimo finito, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali, e si verifichi se $y = [0, 0, 0, 5, 4]$ sia una soluzione ottima duale alternativa a quella individuata dall'algoritmo. Giustificare le risposte.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 3, 5\ \} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 4$$

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 7/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 7/3, \quad h = 1$$

it. 3) $B = \{3, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & 7/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5/3 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}$$

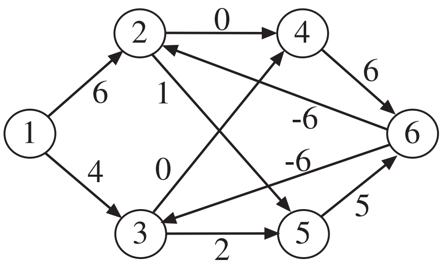
$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathit{STOP}.$$

$B = \{3, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = [2, 0]$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = [0, 0, 5/3, 0, 7/3]$ è una soluzione ottima duale. Osserviamo che $\bar{x}$ è degenere: $I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$. Pertanto, $\bar{y}$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima duale. Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni ammissibili che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$; quindi, affinché y, tale che $yA = c$, sia ottima deve soddisfare la condizione $y_1 = y_2 = 0$. Affinché y sia ammissibile per il problema duale essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 2y_3 + y_4 - y_5 = 1 \\ y_3 + y_5 = 4 \\ y_3 \ ,\ y_4 \ ,\ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Ponendo $y_5 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $[(4 - \alpha), 3\alpha - 7, \alpha]$, per $7/3 \leq \alpha \leq 4$. Pertanto il problema duale ammette infinite soluzioni ottime della forma $y(\alpha) = [0, 0, (4 - \alpha), 3\alpha - 7, \alpha]$, per $7/3 \leq \alpha \leq 4$. Ponendo $\alpha = 4$, segue che $y = [0, 0, 0, 5, 4]$ è una soluzione ottima duale alternativa a $\bar{y}$.

2) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. *i*) La soluzione ottima ottenuta è unica? *ii*) Come cambierebbe l'esito di risoluzione se l'arco $(2, 4)$ costasse -2? Giustificare tutte le risposte.



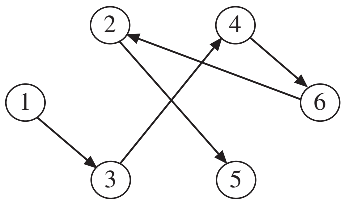
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene cicli orientati, ad esempio $(3, 5, 6)$, e archi di costo negativo. Pertanto l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo è SPT.L in cui Q è implementato come una coda, ovvero l'algoritmo di Bellman, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31.$

it.	u	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	Q
0		0	31	31	31	31	31	nil	1	1	1	1	1	(1)
1	1	0	6	4	31	31	31	nil	1	1	1	1	1	$(2, 3)$
2	2	0	6	4	6	7	31	nil	1	1	2	2	1	$(3, 4, 5)$
3	3	0	6	4	4	6	31	nil	1	1	3	3	1	$(4, 5)$
4	4	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4	(5.6)
5	5	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4	(6)
6	6	0	4	4	4	6	10	nil	6	1	3	3	4	(2)
7	2	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4	(5)
8	5	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4	$\emptyset$

L'albero dei cammini minimi individuato è:



i) Tale albero è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1, nonostante esistano tre archi non appartenenti all'albero che soddisfano le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza. Infatti:

1. $d(5) + 5 = 5 + 5 = 10 = d(6)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(5, 6)$ valgono in forma di uguaglianza: tuttavia $(5, 6)$ non può essere inserito al posto di $(4, 6)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;
2. $d(2)+0 = 4+0 = 4 = d(4)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(2, 4)$ valgono in forma di uguaglianza: tuttavia $(2, 4)$ non può essere inserito al posto di $(3, 4)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;
3. $d(6) - 6 = 10 - 6 = 4 = d(3)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(6, 3)$ valgono in forma di uguaglianza: tuttavia $(6, 3)$ non può essere inserito al posto di $(1, 3)$ perché si creerebbe un ciclo orientato.

ii) Se l'arco $(2, 4)$ costasse -2, il ciclo orientato $(2, 4, 6)$ avrebbe costo negativo, pari a -2. Il problema risulterebbe quindi inferiormente illimitato.

3) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcc} \max & 6x_1 & +10x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Quale sarebbe una soluzione ottima del problema nel caso in cui le variabili potessero assumere valore intero non negativo, invece di essere binarie? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordine delle variabili per Costo Unitario Decrescente è $x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1,1,1,1/3,0,0]$, $\bar{z} = 23 + 1/3$, $\bar{x} = [1,1,1,0,0,0]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 22$. Siccome $\bar{z} = 23 + 1/3 > 22 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1,1,1,0,1/2,0]$, $\bar{z} = 23$. $\bar{x} = [1,1,1,0,0,0]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\underline{z} = 22 = z$, z non cambia. Poiché $\bar{z} = 23 > 22 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1,1,1/2,1,0,0]$, $\bar{z} = 23$. $\bar{x} = [1,1,0,1,1,0]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\bar{z} = 23 > 22 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_4 = x_5 = 0}$ $x^* = [1,1,1,0,0,1/2]$, $\bar{z} = 22 + 1/2$. Si noti che si può porre $\bar{z} = 22$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 22 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0, x_5 = 1}$ $x^* = [1,1,3/4,0,1,0]$, $\bar{z} = 22 + 1/2$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 22$. Poiché $\bar{z} = 22 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 0}$ $x^* = [1,1,0,1,1,0]$, $\bar{z} = \underline{z} = 22$. Il nodo viene chiuso per ottimalità. Poiché $\underline{z} = 22 = z$, potrebbe essere chiuso anche dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 1}$ $x^* = [1/3,1,1,1,0,0]$, $\bar{z} = 22$. Poiché $\underline{z} = 22 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch and Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1,1,1,0,0,0]$, di costo 22.

Se le variabili potessero assumere valore intero non negativo, invece di essere binarie, una soluzione ottima si otterrebbe ponendo $x_2 = 3$, e fissando le variabili restanti a 0. Infatti, nel caso di variabili intere non negative, il problema può essere riformulato sostituendo ogni variabile intera x_i mediante un numero finito (al più 12, per l'istanza in questione) di variabili binarie aventi lo stesso peso e lo stesso costo di x_i, $i = 1,..,6$. L'ottimalità della soluzione indicata segue quindi dall'applicazione dell'algoritmo Branch and Bound alla riformulazione del problema in termini di zaino binario.