RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -4 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & + & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo di spostamento $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h. In caso di ottimo finito, si individui l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^T = 0, \ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2, 5\} = 2,$$

$$\eta_B^T = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B, \ \eta_i > 0\} = \min\{1, 1\} = 1,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = \min\{1, 3\} = 1.$$

it. 2) $B = \{2, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^T = 0, \ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{4, 5\} = 4,$$

$$\eta_B^T = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = 0, \quad h = 3. \quad \text{[cambio di base duale degenere]}$$

it. 3) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^T = 0, \ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

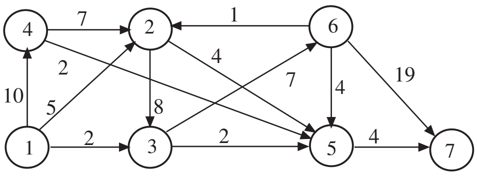
Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, ovvero $\bar{x}$ è una soluzione primale ammissibile, segue che $\bar{x} = (4, 0)$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = (0, 1, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x} = (4, 0)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $\bar{x} = (4, 0)$ è $I(\bar{x}) = \{2, 4, 5\}$. Di conseguenza una soluzione duale y, tale che $y^T A = c^T$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_1 = y_3 = 0$. Affinché y sia ammissibile per il problema duale, essa deve inoltre soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} -y_2 + y_4 = -1 \\ y_2 + y_5 = 1 \\ y_2, \ \ y_4, \ \ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

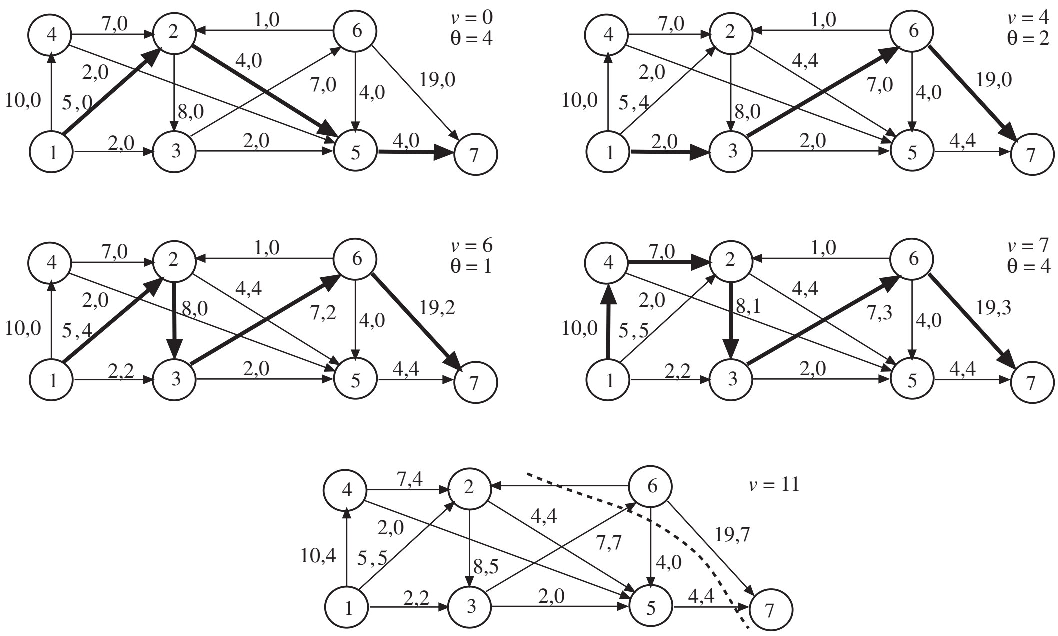
Il sistema di equazioni ammette soluzioni della forma $(\alpha, \alpha - 1, 1 - \alpha)$. Pertanto, imponendo la non negatività delle tre componenti, segue che il sistema ammette come unica soluzione $(1, 0, 0)$. Di conseguenza $\bar{y} = (0, 1, 0, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riporti il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se, oltre al nodo 7, anche il nodo 6 fosse destinazione di flusso? Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione tranne l'ultima viene evidenziato il cammino aumentante P individuato e la sua capacità. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo P di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato (secondo valore associato agli archi del grafo), e il corrispondente valore di flusso v.



Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato, di valore $v = 11$, è un flusso massimo, e il taglio ($N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_t = \{6, 7\}$) è di capacità minima:
$u(N_s, N_t) = u_{36} + u_{57} = 7 + 4 = 11 = v$.

Se, oltre al nodo 7, anche il nodo 6 fosse destinazione di flusso, il valore del flusso massimo resterebbe invariato, a causa della presenza del taglio ($N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_t = \{6, 7\}$), precedentemente individuato, avente capacità 11.

3) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & +10x_2 & +10x_3 & +18x_4 & +18x_5 & & \\ & 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +6x_4 & +3x_5 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si consideri quindi la disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$. Si tratta di un piano di taglio per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: x_5, x_3, x_4, x_2, x_1.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1, 1/3, 1]$, $\bar{z} = 34$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [0, 0, 0, 1, 1/3]$, $\bar{z} = 24$. Siccome $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 33$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_4 = 0,\, x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1]$, $\bar{z} = 28$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} < z$.

$\boxed{x_4 = 0,\, x_2 = 0}$ $x^* = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 30$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = z$.

L'algoritmo termina in quanto Q è vuota. Di conseguenza, la soluzione $x = [1, 0, 1, 0, 1]$, di costo 30, è ottima per il problema.

La disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$ rappresenta un piano di taglio per il problema dato in quanto: 1) è una disuguaglianza valida, ovvero è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato (gli oggetti 3 e 4 non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino); 2) è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (infatti $1 + 1/3 > 1$).