RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y_N = 0 \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{3, 4\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 2\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 3 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 2$ [cambio di base degenere]

it.2) $B = \{2, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{1\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_1 = 3 \ , \ k = 1$$

it.3) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

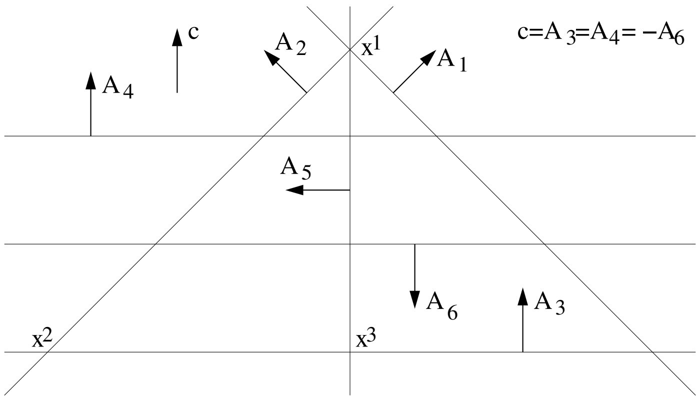
$$y_B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale non degenere e duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \emptyset$$

STOP. ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota.

2) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1,2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. In caso di ottimo finito si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica, e nel caso in cui non lo sia si caratterizzino tutte le soluzioni ottime primali, giustificando la risposta.

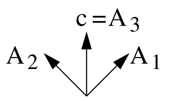


SVOLGIMENTO

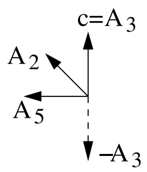
it. 1) $B = \{1,2\}$. Poiché x^1 viola i vincoli 3 e 4, $k = \min\{\, i \in N \ : \ A_i x^1 > b_i \,\} = \min\{3,4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$ in quanto c è interno al cono(A_1, A_2), come mostrato in figura (a)). La base è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1,2,5\}$, ma duale non degenere in quanto $y_i \neq 0$ per ogni $i \in B$. Poiché $A_3 = c$, risultano $\eta_1 = y_1 > 0$, $\eta_2 = y_2 > 0$, $\bar{\theta} = \min\{\, y_i/\eta_i \ : \ i \in B\,,\, \eta_i > 0 \,\} = y_1/\eta_1 = y_2/\eta_2 = 1$; pertanto, $h = \min\{\, i \in B \ : \ \bar{\theta} = y_i/\eta_i \,\} = \min\{1,2\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2) $B = \{2,3\}$. Poiché x^2 viola i vincoli 5 e 6, $k = \min\{5,6\} = 5$ per la regola anticiclo di Bland. $y_2 = 0$ e $y_3 = 1 > 0$ in quanto $c = A_3$. La base è primale non degenere, ma duale degenere in quanto $y_2 = 0$. Poiché $A_5 \in$ cono$(A_2, -A_3)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_2 > 0$ ed $\eta_3 < 0$; pertanto, $\bar{\theta} = y_2/\eta_2 = 0$ (iterazione degenere) e $h = 2$.

it. 3) $B = \{3,5\}$, Poiché x^3 viola il solo vincolo 6, $k = 6$. $y_3 = 1$ e $y_5 = 0$ in quanto $c = A_3$; la soluzione duale non cambia, infatti il passo precedente è stato degenere. La base è primale non degenere, ma ovviamente ancora duale degenere. Poiché $A_6 = -A_3$, risultano $\eta_3 = -1$ ed $\eta_5 = 0$. L'algoritmo quindi termina in quanto $\eta_B \leq 0$: il problema duale è inferiormente illimitato, ed il problema primale è vuoto.



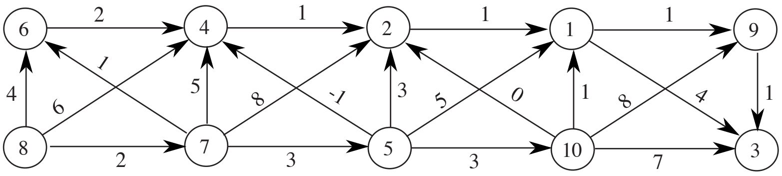
(a)



(b)

Poiché non esiste nessuna soluzione ottima primale (non esistendo nessuna soluzione primale ammissibile), non ha senso discuterne l'unicità.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Durante l'esecuzione dell'algoritmo si esplorino gli archi della stella uscente del nodo selezionato in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si indichi poi come cambierebbero le risposte se l'arco $(10, 9)$ invertisse il suo verso e costo, diventando $(9, 10)$ di costo -8.



SVOLGIMENTO

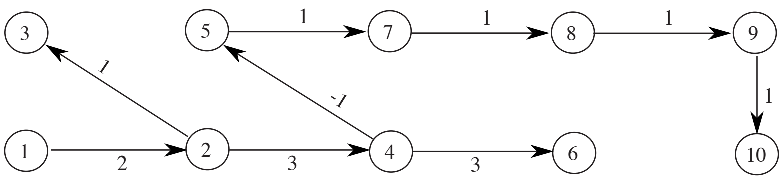
Rinumerando i nodi come segue

originale	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rinumerato	8	7	10	5	4	3	2	1	9	6

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si utilizzano i nomi dei nodi dopo la rinumerazione, e si riporta solamente il numero dell'iterazione, in quanto all'iterazione i-esima viene selezionato il nodo i; inoltre, non viene usata alcuna struttura dati Q.
$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 9 \times 8 + 1 = 73$.

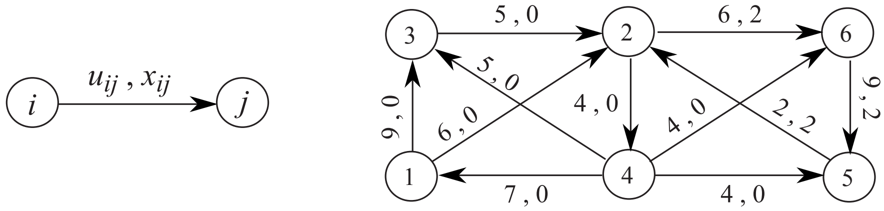
	$p[\cdot]$										$d[\cdot]$									
it.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	73	73	73	73	73	73	73	73	73
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	4	73	6	73	73	73	73	73
2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	0	2	3	5	6	73	10	73	73	73
3	1	1	2	2	3	1	2	1	1	1	0	2	3	5	5	73	10	73	73	73
4	1	1	2	2	4	4	4	1	1	1	0	2	3	5	4	8	8	10	73	73
5	1	1	2	2	4	4	5	1	1	1	0	2	3	5	4	8	5	10	73	73
6	1	1	2	2	4	4	5	6	6	6	0	2	3	5	4	8	5	9	16	15
7	1	1	2	2	4	4	5	7	6	6	0	2	3	5	4	8	5	6	16	15
8	1	1	2	2	4	4	5	7	8	8	0	2	3	5	4	8	5	6	7	10
9	1	1	2	2	4	4	5	7	8	9	0	2	3	5	4	8	5	6	7	8

L'albero dei cammini minimi individuato (sul grafo rinumerato) è



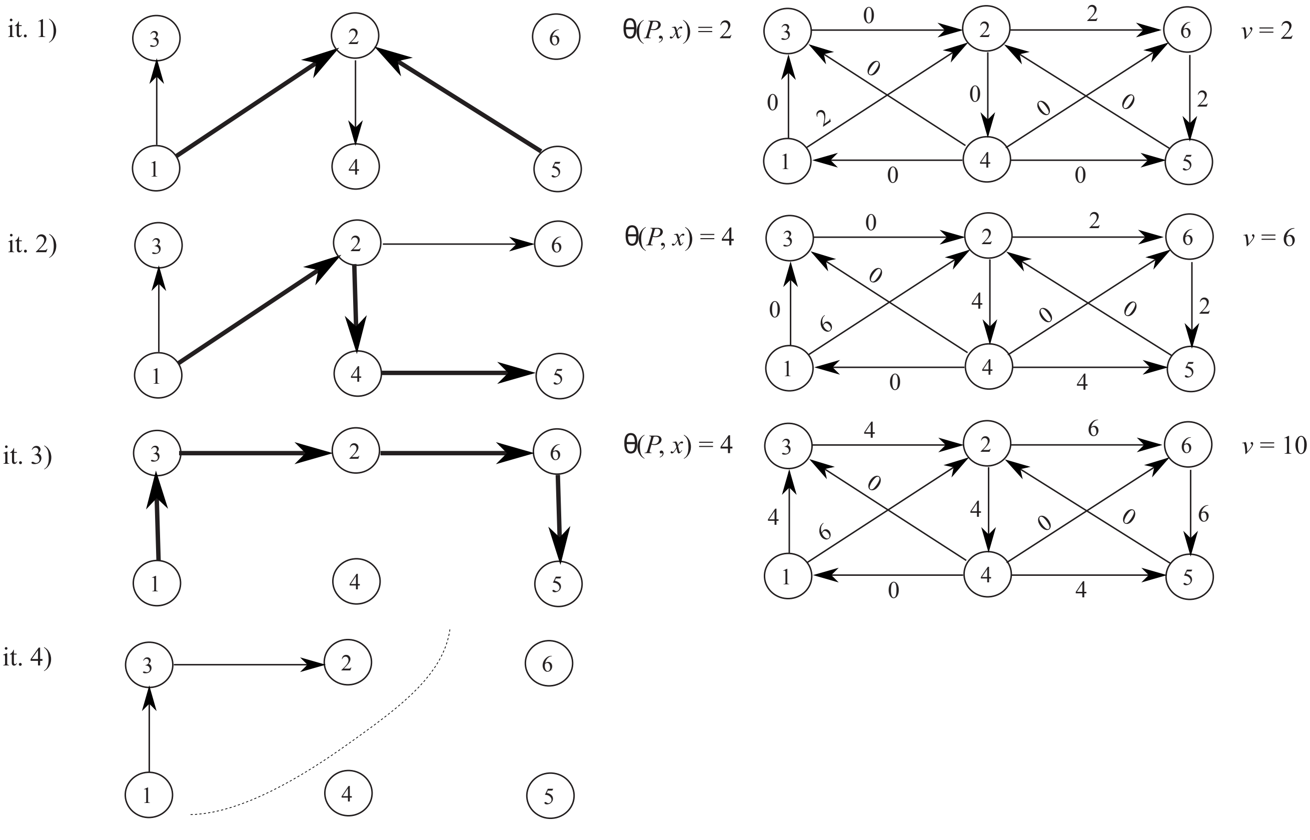
Se l'arco $(10, 9)$ invertisse il suo verso diventando $(9, 10)$, di costo -8, il grafo non sarebbe più aciclico in quanto esisterebbe il ciclo $(10, 1, 9, 10)$, di costo -6. In questo caso, quindi, essendo presente un ciclo orientato di costo negativo, il problema risulterebbe inferiormente illimitato.

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se la soluzione determinata sarebbe ancora ottima se l'arco $(5, 2)$ avesse capacità $u_{52} = 4$.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{26} = 4 + 6 = 10 = v$.



Se l'arco $(5, 2)$ avesse capacità $u_{52} = 4$, la soluzione individuata rimarrebbe ottima. Infatti l'arco $(5, 2)$ appartiene al taglio, ma è in esso inverso; quindi la sua capacità superiore non è rilevante ai fini della capacità del taglio, che rimarrebbe $u(N_s, N_t) = 10$.

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$(P) \quad \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b,\ x \geq 0\ \}.$$

Supponiamo che il sistema

$$(S) \quad \begin{cases} A\xi & \leq & 0 \\ \xi & \geq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $\bar{\xi} \in R^n$. Dimostrare che se (P) è non vuoto, allora è superiormente illimitato.

SVOLGIMENTO

Sia $\bar{x}$ una qualsiasi soluzione ammissibile per (P) e consideriamo $x(\lambda) := \bar{x} + \lambda\bar{\xi}$. Tale soluzione risulta essere ammissibile per (P) per ogni $\lambda \geq 0$; infatti:

$$Ax(\lambda) = A\bar{x} + \lambda A\bar{\xi} \leq A\bar{x} \leq b$$

e

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\bar{\xi} \geq \bar{x} \geq 0$$

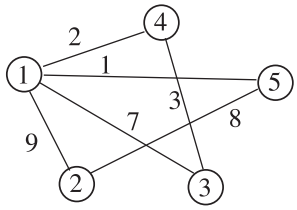
dove le prime disuguaglianze di entrambe le espressioni seguono dal fatto che $\bar{\xi}$ risolve (S) e $\lambda \geq 0$, mentre le seconde dall'ammissibilità di $\bar{x}$. Inoltre, il valore della funzione obiettivo cresce indefinitamente al crescere di λ:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\bar{\xi} \longrightarrow +\infty \quad \text{per} \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

in quanto $c\bar{\xi} > 0$.

$\bar{\xi}$ è quindi una direzione ammissibile di crescita illimitata per (P), che pertanto è superiormente illimitato.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, il nodo con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una fila. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore, se il rilassamento viene eseguito. Per ogni nodo dell'albero si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 21$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile: pertanto $\underline{z} = 21 < z = +\infty$ ed occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre lati incidenti, e a creare $3(3-1)/2 = 3$ figli, fissando a zero la variabile corrispondente al lato $(1,3)$, $(1,4)$ e $(1,5)$, rispettivamente.

$\boxed{x_{13} = 0}$ Poiché il nodo 3 ha un solo lato incidente nel grafo ottenuto rimuovendo $(1,3)$, in tale grafo non esiste alcun ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{14} = 0}$ Poiché il nodo 4 ha un solo lato incidente nel grafo ottenuto rimuovendo $(1,4)$, in tale grafo non esiste alcun ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{15} = 0}$ Poiché il nodo 5 ha un solo lato incidente nel grafo ottenuto rimuovendo $(1,5)$, in tale grafo non esiste alcun ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo termina. Siccome $z = +\infty$, non esiste alcuna soluzione ammissibile per il problema, che infatti è vuoto.

a)