RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva algebricamente il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrrcr} \max & 2x_1 & & & \\ & & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & -2x_2 & \leq & 10 \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & & \leq & 2 \\ & -x_1 & & \leq & 0 \end{array}$$

mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Ad ogni iterazione si mostrino la base, la matrice di base e la sua inversa, le soluzioni di base, la direzione e il passo di spostamento, gli indici entrante ed uscente, giustificando le risposte. Discutere l'eventuale degenerazione primale e duale della base ottima.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b_N, \quad k = \min\{\, i \in N \,:\, A_i \bar{x} > b_i \,\} = \min\{3, 4\} = 3$$

$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\theta = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i \,:\, i \in B \,, \eta_i > 0 \,\} = \min\{\, \bar{y}_1/\eta_1 \,, \bar{y}_2/\eta_2 \,\} = \min\{\, 4/3, 1 \,\} = 1$, $h = 2$.

it. 2) $B = \{1, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b_N, \quad k = 4$$

$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. $\theta = \min\{2, 2\} = 2$, $h = \min\{1, 3\} = 1$ (regola anticiclo di Bland)

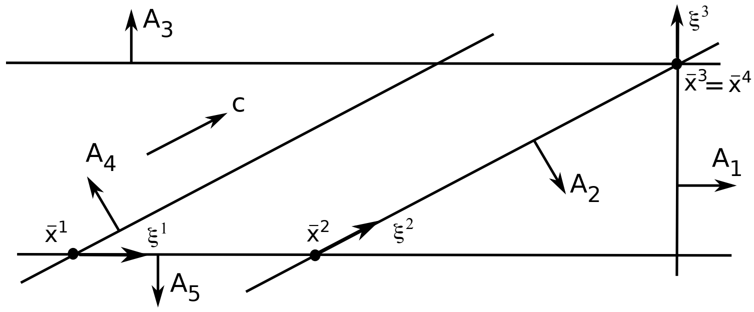
it. 3) $B = \{4, 3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (base duale degenere)

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = b_N, \quad \text{STOP.}$$

Poiché $\bar{x} = [2, -4]$ è ammissibile, l'algoritmo termina: $B = \{4, 3\}$ è una base ottima, $\bar{x}$ è soluzione ottima del problema primale, e $\bar{y} = [0, 0, 0, 2, 0]$ è soluzione ottima del problema duale. Poiché $\bar{y}_3 = 0$ e $3 \in B$ la base è duale degenere. Poiché inoltre $A_2 \bar{x} = b_2$ e $2 \notin B$, la base ottima è anche primale degenere.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Alla fine, se l'algoritmo termina con esito ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima duale determinata.



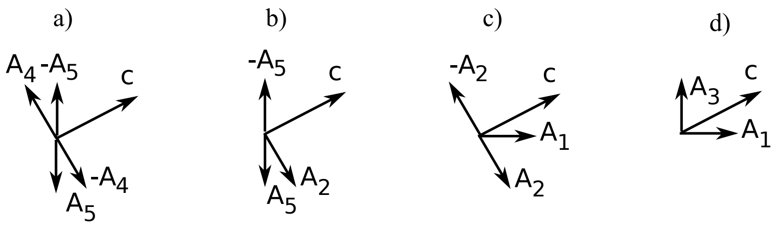
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{4, 5\}$, $\bar{y}_4 < 0$ e $\bar{y}_5 < 0$ poiché c appartiene (è interno) al cono generato da $-A_4$ e $-A_5$, come mostrato in a); quindi, $h = 4$ per la regola anticiclo di Bland. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 2, quindi $k = 2$.

it. 2) $B = \{2, 5\}$, $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 ed $-A_5$, come mostrato in b); quindi, $h = 5$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei due vincoli 1 e 3: quindi $k = 1$, per la regola anticiclo di Bland.

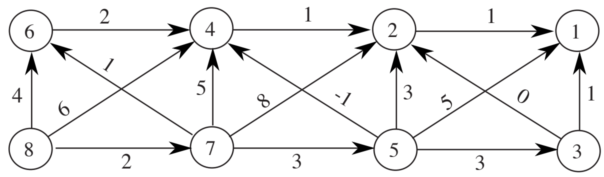
it. 3) $B = \{1, 2\}$, $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in c); quindi, $h = 2$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 3, attivo ma non in base; quindi $k = 3$ e si esegue un cambio di base degenere.

it. 4) $B = \{1, 3\}$, $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 ed A_3, come mostrato in d); quindi l'algoritmo termina avendo individuato in $\bar{x}^4$ una soluzione ottima del primale. Essendo $\bar{x}^3 = \bar{x}^4$ (la terza iterazione è degenere), la soluzione primale era già ottima all'iterazione precedente, ma la soluzione duale non ha permesso di verificarlo.



Per discutere l'unicità della soluzione duale basta notare che la base ottima è primale degenere. In particolare, la base $B' = \{2, 3\}$ induce la stessa soluzione di base primale, $\bar{x}^3 = \bar{x}^4$, ed è duale ammissibile. La soluzione di base duale corrispondente a B' è quindi anch'essa ottima, ed è diversa da quella corrispondente alla base B perché in quest'ultima $\bar{y}_1 > 0$ (c è interno al cono generato da A_1 ed A_3), mentre per la soluzione duale corrispondente a B' si ha $\bar{y}_1 = 0$ in quanto $1 \notin B'$. Pertanto la soluzione duale ottima del problema non è unica.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q. Durante l'esecuzione dell'algoritmo si esplorino gli archi della stella uscente del nodo selezionato in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si indichi poi come cambierebbero le risposte se l'arco $(8,4)$ invertisse il suo verso, diventando $(4,8)$.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

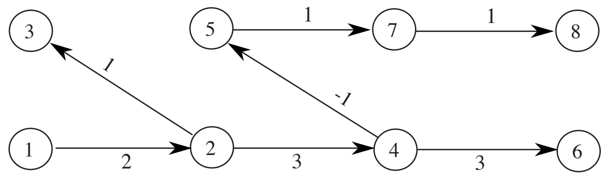
originale	1	2	3	4	5	6	7	8
rinumerato	8	7	6	5	4	3	2	1

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti per ogni arco (i,j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si utilizzano i nomi dei nodi dopo la rinumerazione, e si riporta solamente il numero dell'iterazione, in quanto all'iterazione i-esima viene selezionato il nodo i; inoltre, non viene usata alcuna struttura dati Q.

$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 7 \times 8 + 1 = 57.$

it.	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$
0	*nil*	1	1	1	1	1	1	1	0	57	57	57	57	57	57	57
1	*nil*	1	1	1	1	1	1	1	0	2	4	57	6	57	57	57
2	*nil*	1	2	2	1	1	2	1	0	2	3	5	6	57	10	57
3	*nil*	1	2	2	3	1	2	1	0	2	3	5	5	57	10	57
4	*nil*	1	2	2	4	4	4	4	0	2	3	5	4	8	8	10
5	*nil*	1	2	2	4	4	5	4	0	2	3	5	4	8	5	10
6	*nil*	1	2	2	4	4	5	6	0	2	3	5	4	8	5	9
7	*nil*	1	2	2	4	4	5	7	0	2	3	5	4	8	5	6

L'albero dei cammini minimi individuato (sul grafo rinumerato) è



Se l'arco $(8,4)$ invertisse il suo verso diventando $(4,8)$, il grafo non sarebbe più aciclico in quanto esisterebbe il ciclo $(8,6,4)$. Questo significherebbe che l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo diverrebbe SPT.L.Queue, che ha complessità $O(mn)$ anche nel caso di presenza di archi di costo negativo. Ciononostante l'albero dei cammini minimi rimarrebbe lo stesso in quanto l'arco $(1,5)$ ($(8,4)$ dopo la rinumerazione) non appartiene all'albero dei cammini minimi, e, con le etichette determinate, un arco $(5,1)$ di costo $c_{51} = 6$ non viola le condizioni di Bellman.

4) La cooperativa di taxi “Et voila”, in difficoltà per via dell’arrivo dei nuovi servizi basati su Internet, ha deciso di utilizzare strumenti matematici sofisticati per aumentare la propria competitività. Per la giornata di oggi la cooperativa ha assunto gli impegni in tabella, dove per ogni corsa sono riportati l’orario in cui bisogna trovarsi presso il cliente e la durata del servizio richiesto. Il responsabile delle operazioni deve determinare quanti dei tre autisti a sua disposizione siano necessari per rispettare gli impegni presi. Lo si aiuti formulando il problema mediante un modello di *Programmazione Lineare Intera*.

Corsa	1	2	3	4	5
Tempo inizio	9:00	9:30	10:30	13:20	15:00
Durata	2:00	1:30	1:00	2:20	1:30

SVOLGIMENTO

Considerando le corse come lavori e gli autisti come macchine, il problema in questione è formulabile come un problema di ordinamento di lavori su macchine con minimizzazione del numero delle macchine. In questo caso abbiamo 5 lavori e 3 macchine.

Introduciamo pertanto variabili binarie x_{ij} (con $i = 1, \ldots, 5$ e $j = 1, 2, 3$) che assumeranno valore 1 se il servizio i è affidato all’autista j, e 0 altrimenti. Determiniamo inoltre gli insiemi $S(i)$ dei servizi $h > i$ che hanno sovrapposizioni con il servizio i, per $i = 1, \ldots, 4$, e che quindi sono con esso incompatibili: risulta $S(1) = \{2, 3\}$, $S(2) = \{3\}$, $S(3) = \emptyset$, $S(4) = \{5\}$. Possiamo quindi formulare il problema mediante:

$$\min \textstyle\sum_{j=1}^{3} y_j \tag{1}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, 5 \tag{2}$$

$$x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \qquad i = 1, \ldots, 5,\ \ h \in S(i),\ \ j = 1, 2, 3 \tag{3}$$

$$5y_j \geq \textstyle\sum_{i=1}^{5} x_{ij} \qquad j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, 5,\ \ j = 1, 2, 3 \tag{5}$$

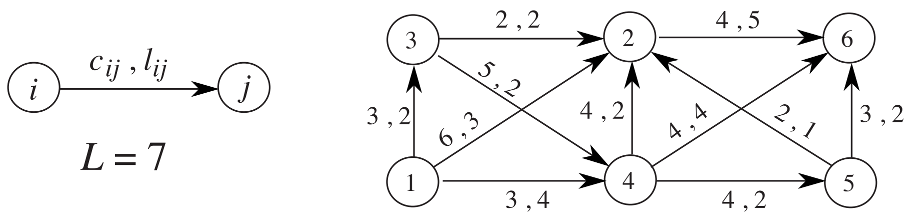
$$y_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, 2, 3 \tag{6}$$

La funzione obiettivo (1) minimizza il numero di autisti utilizzati. I vincoli di semiassegnamento (2) impongono che ciascun servizio venga assegnato ad uno ed un solo autista. I vincoli di incompatibilità (3) impongono che corse incompatibili vengano assegnate ad autisti diversi; per chiarezza ne riportiamo la versione estesa:

$$\begin{array}{llll} x_{11} + x_{21} \leq 1 & x_{11} + x_{31} \leq 1 & x_{21} + x_{31} \leq 1 & x_{41} + x_{51} \leq 1 \\ x_{12} + x_{22} \leq 1 & x_{12} + x_{32} \leq 1 & x_{22} + x_{32} \leq 1 & x_{42} + x_{52} \leq 1 \\ x_{13} + x_{23} \leq 1 & x_{13} + x_{33} \leq 1 & x_{23} + x_{33} \leq 1 & x_{43} + x_{53} \leq 1 \end{array} .$$

Infine, i vincoli (4) impongono che, se un servizio viene assegnato ad un autista, allora quell’autista dovrà essere utilizzato.

5) Si risolva il problema del Cammino Minimo Vincolato dal nodo 1 al nodo 6 del grafo in figura utilizzando l'algoritmo Branch&Bound che usa come rilassamento il Cammino Minimo (non vincolato), nessuna euristica, visita l'albero delle decisioni a scandaglio, e come regola di branching usa la seguente: dato il cammino minimo ottenuto dal rilassamento, nel primo dei figli si elimina il primo arco del cammino, nel secondo si fissa in soluzione il primo arco e si elimina il secondo, nel terzo si fissano in soluzione i primi due archi e si elimina il terzo, e così via. Per ogni nodo si riporti la soluzione del rilassamento e si indichi se il nodo viene chiuso e perché, oppure se viene effettuato il branching e come. Si esaminino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni; se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap ottenuto quando l'algoritmo viene interrotto, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate; inizialmente $z = +\infty$. La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'albero dei cammini minimi (SPT) ottenuto è mostrato in a). Il cammino $P = \{(1,4),(4,6)\}$ ha costo $\underline{z} = 7$ ma lunghezza pari ad 8, e quindi non è ammissibile. Non avendo ottenuto nessuna soluzione ammissibile resta $z = +\infty > \underline{z} = 7$ ed occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a creare un nodo in cui si elimina l'arco $(1,4)$, ed un altro in cui si fissa in soluzione l'arco $(1,4)$ mentre si elimina l'arco $(4,6)$.

$\boxed{x_{14} = 0}$ L'SPT ottenuto è mostrato in b). Il cammino $P = \{(1,3),(3,2),(2,6)\}$ ha costo $\underline{z} = 9$ ma lunghezza pari a 9, e quindi non è ammissibile: pertanto resta $z = +\infty > \underline{z} = 9$ ed occorre procedere con il branching, creando un nodo in cui si elimina l'arco $(1,3)$, un altro in cui si fissa in soluzione l'arco $(1,3)$ mentre si elimina l'arco $(3,2)$, ed un terzo un cui si fissano in soluzione $(1,3)$ e $(3,2)$ mentre si elimina l'arco $(2,6)$.

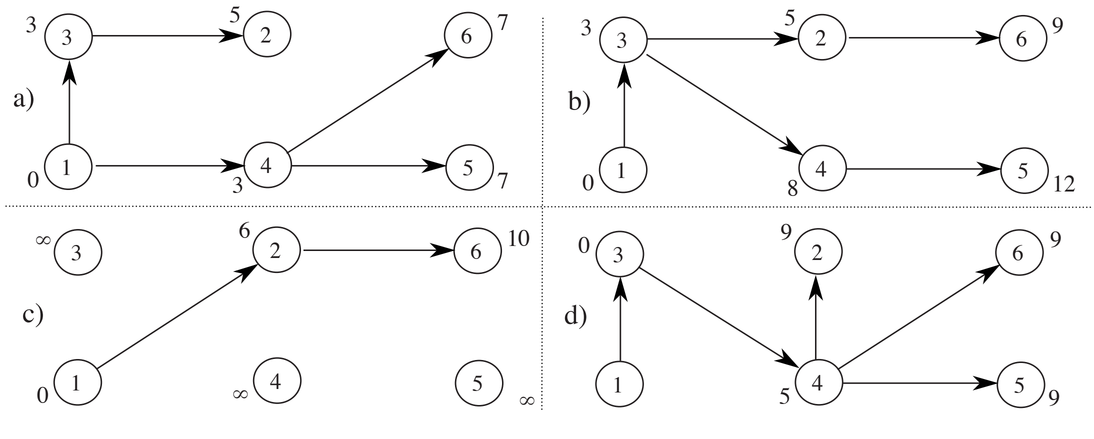
$\boxed{x_{14} = x_{13} = 0}$ L'SPT ottenuto è mostrato in c). Il cammino $P = \{(1,2),(2,6)\}$ ha costo $\underline{z} = 10$ e lunghezza pari ad 8. Non si è ancora ottenuta nessuna soluzione ammissibile; pertanto resta $z = +\infty > \underline{z} = 10$ ed occorre procedere con il branching, creando un nodo in cui si elimina l'arco $(1,2)$ ed un altro in cui si fissa in soluzione l'arco $(1,2)$ mentre si elimina l'arco $(2,6)$.

$\boxed{x_{14} = x_{13} = x_{12} = 0}$ Il nodo 1 non ha archi uscenti: quindi, l'SPT contiene il solo nodo radice. Non esistono quindi cammini da 1 a 6: la valutazione inferiore è $\underline{z} = +\infty = z$, ed il nodo viene chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{14} = x_{13} = x_{26} = 0, x_{12} = 1}$. L'SPT (di radice 2) contiene il solo nodo radice. Non esistono quindi cammini da 1 a 6: la valutazione inferiore è $\underline{z} = +\infty = z$, ed il nodo viene chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{14} = x_{32} = 0, x_{13} = 1}$ L'SPT (di radice 3) ottenuto è mostrato in d). Il cammino $P = \{(1,3),(3,4),(4,6)\}$ ha costo $\underline{z} = 9$ e lunghezza pari ad 8. Non si è ancora ottenuta nessuna soluzione ammissibile; pertanto resta $z = +\infty > \underline{z} = 9$ ed occorre procedere con il branching, creando un nodo in cui si elimina l'arco $(3,4)$ ed un altro in cui si fissa in soluzione l'arco $(3,4)$ mentre si elimina l'arco $(5,6)$.

Poiché sono stati esaminati 6 nodi l'algoritmo viene interrotto, ma $Q \neq \emptyset$: non si è quindi determinata la soluzione ottima del problema. In effetti non si è determinata alcuna soluzione del problema: $z = +\infty$. La miglior valutazione inferiore disponibile è $\underline{z} = 7$, corrispondente al nodo radice che ha ancora il figlio $x_{14} = 1, x_{46} = 0$ in coda; il gap relativo è quindi $+\infty$. È facile verificare che il problema in effetti non ha alcuna soluzione ammissibile, e quindi l'algoritmo non avrebbe potuto determinarne alcuna. Nel momento in cui è stato interrotto, tuttavia, l'algoritmo non è stato in grado di dimostrare che il problema sia vuoto.



Si osservi che, mentre risolvere il problema del Cammino Minimo Vincolato è $\mathcal{NP}$-arduo, determinare se esiste una soluzione ammissibile è invece risolubile in tempo polinomiale (la dimostrazione è lasciata come esercizio).

6) Data la coppia asimmetrica di problemi di PL:

$$(\mathrm{P})\ \max\{cx : Ax \leq b\} \text{ e } (\mathrm{D})\ \min\{yb : yA = c, y \geq 0\},$$

dimostrare che, se durante un'iterazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, relativa ad una data base B, si ottiene $A_N\xi \leq 0$, allora (D) risulta vuoto.

SVOLGIMENTO

La direzione determinata dall'algoritmo è $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$, dove A_B è la matrice di base, h è l'indice uscente dalla base, $B(h)$ è la posizione che A_h occupa nella matrice A_B, e $u_{B(h)}$ è il vettore a n dimensioni che ha tutte le componenti nulle salvo quella di posizione $B(h)$, che ha valore 1.

Pertanto, la direzione ξ è tale che $A_i\xi = 0$, per ogni $i \in B \setminus \{h\}$, mentre $A_h\xi = -1$; inoltre, la variabile duale $\bar{y}_h$, corrispondente all'indice h uscente di base, è negativa, cioè:

$$\bar{y}_h = cA_B^{-1}u_{B(h)} < 0.$$

La direzione ξ è di crescita per il problema (P); infatti:

$$c\xi = -cA_B^{-1}u_{B(h)} = -\bar{y}_h > 0.$$

Inoltre, le proprietà della direzione ξ sopra mostrate e l'ipotesi che $A_N\xi \leq 0$ implicano che $A\xi \leq 0$.

Indicando con $\bar{x}$ la soluzione di base primale associata alla base B, si consideri $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\xi$, ovvero il fascio di soluzioni primali, parametriche in λ, ottenute spostandosi lungo la direzione ξ. Sotto le ipotesi in questione tali soluzioni risultano ammissibili per ogni valore $\lambda \geq 0$; infatti:

$$Ax(\lambda) = A\bar{x} + \lambda A\xi \leq A\bar{x} \leq b, \quad \forall\lambda \geq 0,$$

in quanto B è una base primale ammissibile.

Inoltre, il valore della funzione obiettivo in corrispondenza del fascio di soluzioni ammissibili $x(\lambda)$ cresce al crescere di λ:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\xi \to \infty \text{ per } \lambda \to \infty.$$

(P) risulta quindi superiormente illimitato e di conseguenza, per il Teorema Debole della Dualità, (D) risulta vuoto.