# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

**Nome:** **Cognome:** **Matricola:**

**1)** Si risolva algebricamente il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & - & 2x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 7 \end{array}$$

mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione $\xi$ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi $c$ fosse $[1, -1]$ invece che $[1, -2]$, $\xi$ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{3, 4\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y}_N = 0 \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere in quanto $B \subset I(\bar{x}) = \{2, 3, 4\}$, e duale non degenere in quanto $\bar{y}_i \neq 0$ per ogni $i \in B$]

$$h = \min\{\, i \in B \,:\, \bar{y}_i < 0 \,\} = \min\{3, 4\} = 3 \quad \text{[regola anticiclo di Bland]} \ , \ B(h) = 1$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 2\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x}) / A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 2 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{2, 4\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$ , $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{1\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_1 = 5 \ , \ k = 1$$

it.3) $B = \{1, 2\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale non degenere e duale non degenere] $h = 2$ , $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \emptyset$$

STOP. $\xi$ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota. Se il vettore dei costi $c$ fosse $[1, -1]$ invece che $[1, -2]$ si avrebbe $c\xi = 0$, e pertanto la direzione $\xi$ non sarebbe di crescita.

**2)** Si consideri il seguente problema di $PL$ parametrico in $\varepsilon$

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4+\varepsilon \end{array}$$

e la soluzione $\bar{y} = [0, 0, 6/5, 1/5]$ per il suo duale; utilizzando il il teorema degli scarti complementari si determini per quali valori di $\varepsilon$ la soluzione $\bar{y}$ è ottima per il duale, discutendone l'unicità. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Per la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{\, cx \,:\, Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \quad \min\{\, yb \,:\, yA = c \,,\, y \geq 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

**Proposizione.** Una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per $(D)$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per $(P)$ complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il duale di $(P)$ è

$$(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & y_1 & & & + & y_3 & + & (4+\varepsilon)y_4 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 3 \\ & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & -1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Per il teorema degli scarti complementari, $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione primale $\bar{x}$ che rispetta gli scarti complementari con essa. Ovvero i vincoli primali a cui corrispondono variabili duali che hanno valore positivo in $\bar{y}$, ossia i vincoli 3 e 4, devono essere attivi in $\bar{x}$. Quindi $\bar{x}$ deve necessariamente risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 4+\varepsilon \end{array} \right.$$

che ha come unica soluzione $\bar{x}(\varepsilon) = [1 + \varepsilon/5, 1 + 2\varepsilon/5]$. Affinché $\bar{y}$ sia ottima occorre quindi che tale soluzione rispetti gli altri due vincoli del problema; da ció si ricava

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -(1+\varepsilon/5) - (1+2\varepsilon/5) \leq 1 & \Longrightarrow & \varepsilon \geq -5 \\ -(1+\varepsilon/5) + (1+2\varepsilon/5) \leq 0 & \Longrightarrow & \varepsilon \leq 0 \end{array} \right.$$

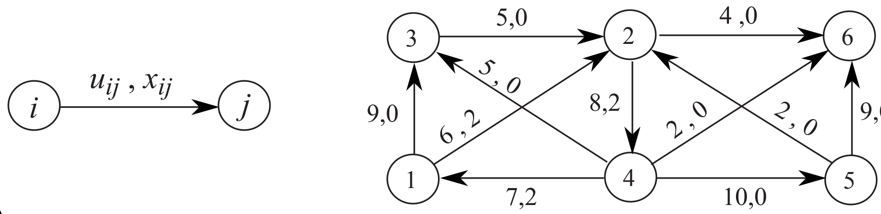
Pertanto la soluzione $\bar{y}$ è ottima per tutti i valori $\varepsilon \in [-5, 0]$.

Per discuterne l'unicità dobbiamo studiare l'insieme dei vincoli attivi $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \,:\, A_i\bar{x}(\varepsilon) = b_i \,\}$. Tale insieme comprende sempre i vincoli 3 e 4. L'analisi precedente mostra facilmente che $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 3, 4\}$ per $\varepsilon = -5$, $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{3, 4\}$ per $\varepsilon \in (-5, 0)$, e $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{2, 3, 4\}$ per $\varepsilon = 0$. Per tutti i valori $\varepsilon \in (-5, 0)$ la base $B = \{3, 4\}$ è primale e duale ammissibile, primale e duale non degenere: di conseguenza, $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima del duale (e $\bar{x}(\varepsilon)$ è l'unica soluzione ottima del primale). Restano quindi da studiare individualmente i due casi estremi.

Per $\varepsilon = -5$ $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale: infatti, la soluzione di base duale $[3, 0, 0, 2]$ corrispondente alla base $\{1, 4\}$ è ancora ammissibile, e poiché rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}(-5) = [0, -1]$, segue che è anch'essa ottima.

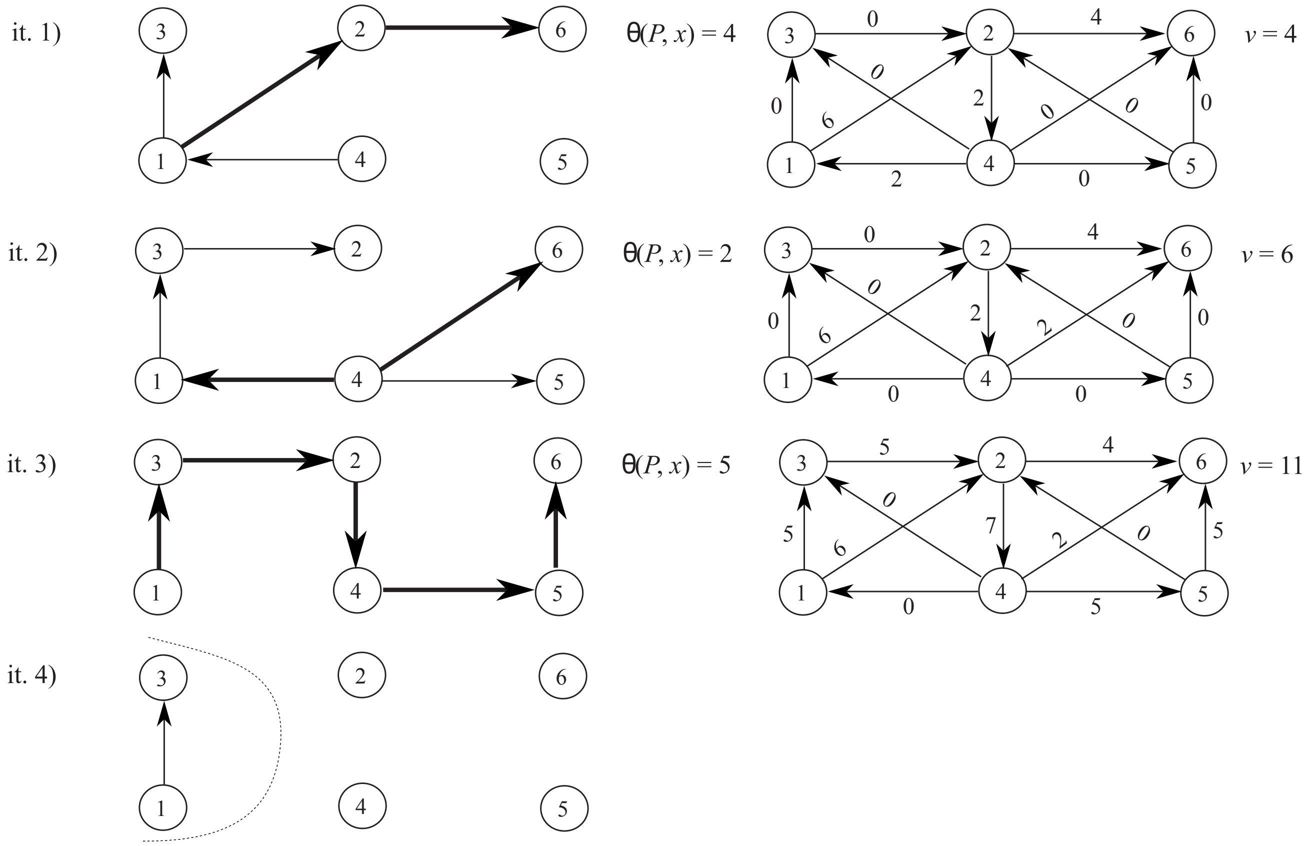
Similmente, per $\varepsilon = 0$ $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale: infatti, la soluzione di base duale $[0, 1, 2, 0]$ corrispondente alla base $\{2, 3\}$ è ammissibile e rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}(0) = [1, 1]$.

**3)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio $(N_s, N_t)$ restituito dall'algoritmo e la sua capacità, discutendo se sia l'unico taglio di capacità minima. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l'arco $(2, 4)$ avesse capacità $u_{24} = 7$.




**SVOLGIMENTO**

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante $P$ individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo $P$ di un valore di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore $v$. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{32} = 6 + 5 = 11 = v$. Il taglio è unico, come si può verificare esaminandoli tutti.




Se l'arco $(2, 4)$ avesse capacità $u_{24} = 7$, l'algoritmo compirebbe la stessa sequenza di passi determinando la stessa soluzione e lo stesso taglio. Questo però non sarebbe più l'unico taglio di capacità minima, in quanto $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ avrebbe anch'esso capacità 11.

**4)** Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, si riformuli il seguente modello matematico

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{\, 2x_1 - x_2 - x_3 \,,\, x_1 + x_2 + 2x_3 \,\} \\ & x_1 \in \{0,1\} \\ & 0 \le x_2 \le 50 \\ & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 50 \\ & x_3 = x_2 x_1 \end{array}$$

come un problema di Programmazione Lineare Intera ($PLI$). Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Il modello matematico proposto non è un modello di $PLI$ in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (bensì è definita come il massimo di due funzioni lineari);
- è presente un'implicazione logica che lega la variabile $x_2$ al valore assunto dalla variabili binaria $x_1$;
- la variabile $x_3$ è definita come il prodotto di due variabili, di cui una binaria.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello $PLI$ nel modo seguente:

$$\min z \tag{1}$$
$$z \ge 2x_1 - x_2 - x_3 \tag{2}$$
$$z \ge x_1 + x_2 + 2x_3 \tag{3}$$
$$x_1 \in \{0,1\} \tag{4}$$
$$0 \le x_2 \le 50 \tag{5}$$
$$x_2 \ge 50(1 - x_1) \tag{6}$$
$$0 \le x_3 \le 50x_1 \tag{7}$$
$$x_2 - x_3 \le 50(1 - x_1) \tag{8}$$
$$x_2 - x_3 \ge 0 \tag{9}$$

Per via dei vincoli (1) e (2), la variabile di soglia $z$ stima per eccesso il massimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $2x_1 - x_2 - x_3$ e $x_1 + x_2 + 2x_3$. Minimizzando $z$, il solutore attribuisce pertanto a $x_1$, $x_2$ e $x_3$ quei valori (ammissibili) che minimizzano il massimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Il vincolo (6) garantisce che se $x_1 = 0$ allora la variabile $x_2$ debba assumere valori $\ge 50$, e quindi sia forzata al valore 50 grazie al vincolo di upper bound (5) (si noti che il vincolo di non negatività in (5) risulta ora ridondante, e potrebbe essere eliminato).

Il vincolo (7) (si noti che il vincolo di non negatività relativo a $x_3$ è implicito nel modello matematico proposto) garantisce che, se $x_1 = 0$, allora $x_3 = 0$ (in tal caso il vincolo (8) risulta ridondante). Se invece $x_1 = 1$, poiché in ogni soluzione ammissibile del modello vale $x_2 \ge x_3$, ovvero $x_2 - x_3 \ge 0$, il vincolo logico (8), unitamente a (9), implica $x_3 = x_2$, come richiesto (in questo caso è il vincolo (7) a risultare ridondante).

**5)** Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max & 2x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo depth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine se i dati ricavati durante l'esecuzione dell'algoritmo permettano di dichiarare che la soluzione ottima è unica.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0,0,1/3,1,1]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [0,0,0,1,1]$, $\underline{z} = 14$. Poiché $\underline{z} = 14 > z = -\infty$, $z = 14$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0,1/2,0,1,1]$, $\bar{z} = 16 + 1/2$, $\bar{x} = [0,0,0,1,1]$, $\underline{z} = 14$. Siccome $\bar{z} > z = 14$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [2/3,0,0,1,1]$, $\bar{z} = 15 + 1/3$, $\bar{x} = [0,0,0,1,1]$, $\underline{z} = 14$. Siccome $\bar{z} = 15 + 1/3 > z = 14$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_1$.

$\boxed{x_3 = x_2 = x_1 = 0}$ $x^* = [0,0,0,1,1]$, $\bar{z} = 14$, $\bar{x} = [0,0,0,1,1]$, $\underline{z} = 14$. Poichè la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} \leq z$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0,\ x_1 = 1}$ $x^* = [1,0,0,1/2,1]$, $\bar{z} = 13 + 1/2$, Siccome $\bar{z} = 13 + 1/3 < z = 14$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0,1,0,0,1]$, $\bar{z} = 14$. Poichè la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} \leq z$.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0,0,1,0,1/3]$, $\bar{z} = 12$. Siccome $\bar{z} < z = 14$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché $Q = \emptyset$, l'algoritmo termina: $z = 14$ è il valore ottimo del problema. Si osservi che esistono soluzioni ottime multiple: l'algoritmo ne ha determinate due equivalenti, $[0,0,0,1,1]$ (al nodo radice) e $[0,1,0,0,1]$ (al nodo $x_3 = 0$, $x_2 = 1$).

**6)** Si enuncino e si dimostrino le condizioni di ottimalità relative al problema di Flusso di Costo Minimo.

**SVOLGIMENTO**

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, si consideri il problema di Flusso di Costo Minimo definito su $G$ relativamente ad un vettore $b$ di bilanci ai nodi, un vettore $u$ di capacità superiori associate agli archi, ed un vettore $c$ di costi unitari, anch'essi associati agli archi di $G$. Dato un flusso ammissibile $x$, vale la seguente caratterizzazione della sua ottimalità: $x$ è di costo minimo se e solo se non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto ad $x$ (equivalentemente, cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo associato a $x$, ovvero $G_x$).

Per dimostrare tale risultato, consideriamo dapprima il caso in cui $x$ sia un flusso di costo minimo, e supponiamo per assurdo che esista un ciclo aumentante $C$ rispetto ad $x$ di costo negativo $c(C)$. Questo significa che la capacità di $C$ rispetto ad $x$, $\theta(C, x)$, è strettamente positiva. Quindi, per qualsiasi $0 < \varepsilon \leq \theta(C, x)$, il flusso

$$x(\varepsilon) = x \oplus \varepsilon C$$

ottenuto inviando lungo $C$ una quantità positiva di flusso $\varepsilon$ è anch'esso ammissibile. Per la linearità dei costi rispetto all'operatore di composizione $\oplus$ tra flussi e cammini risulta

$$cx(\varepsilon) = cx + \varepsilon c(C) < cx$$

(in quanto $c(C) < 0$ e $\varepsilon > 0$), contraddicendo l'ipotesi che $x$ sia un flusso di costo minimo.

Supponiamo ora che non esistano cicli aumentanti di costo negativo rispetto ad $x$, ma esista un flusso ammissibile $\bar{x}$ tale che $cx > c\bar{x}$. Per il teorema di decomposizione dei flussi, esistono $k \leq m$ cicli aumentanti $C_1$, $C_2$, $\ldots C_k$ rispetto ad $x$ e $k$ numeri reali $\theta_1$, $\theta_2$, $\ldots$, $\theta_k$ tali che $0 < \theta_i \leq \theta(C_i, x)$ per $i = 1, \ldots, k$ tali che

$$\bar{x} = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \theta_2 C_2 \oplus ... \oplus \theta_k C_k \quad .$$

Considerando i costi, vale pertanto la relazione

$$c\bar{x} = cx + \theta_1 c(C_1) + \theta_2 c(C_2) + ... + \theta_k c(C_k) \quad .$$

Poiché, per ipotesi, ogni ciclo aumentante ha costo non negativo, e le quantità di flusso inviate sono positive, segue che

$$c\bar{x} \geq cx$$

ottenendo una contraddizione con $cx > c\bar{x}$ e pertanto dimostrando il teorema.