RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

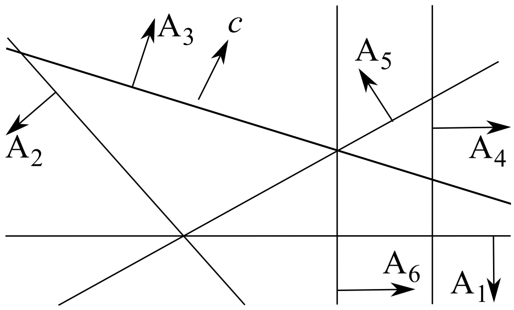
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

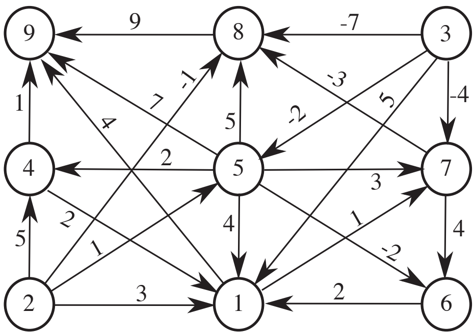
$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si consideri quindi il caso in cui il costo della variabile x_2 sia 1 invece che 2 e, in caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata continui a restare ottima per il primale modificato; si individui inoltre l'insieme delle soluzioni ottime, sia primali che duali, per la coppia modificata. Giustificare le risposte.

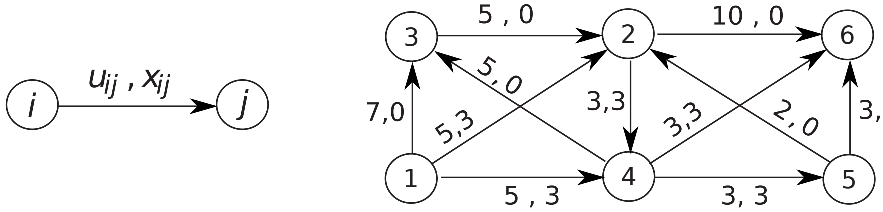
2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $\{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale e la direzione di crescita (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, gli indici uscente ed entrante, e si discuta la degenerazione primale e duale, giustificando le risposte. Al termine, se il problema ammette ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima sia primale che duale, giustificando le risposte.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri quindi il caso in cui il costo dell'arco $(1, 7)$ sia un parametro reale ϵ, invece di valere 1, e si discuta l'ottimalità e l'unicità dell'albero determinato al variare di ϵ. Giustificare le risposte.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 6$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). A ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine quale sarebbe il massimo numero di unità di flusso inviabili al nodo 6 se, oltre al nodo 1, anche il nodo 5 fosse una sorgente di flusso. Giustificare la risposta.



5) Una compagnia specializzata in video giochi ha sette proposte di nuovi giochi. Tuttavia, la compagnia non è in grado di sviluppare tutte le proposte in quanto il suo budget è limitato a 950,000, e solo 20 programmatori possono essere assegnati ai nuovi progetti. Il capitale e il numero di programmatori richiesti per progetto sono riassunti nel seguito, unitamente al ricavo stimato per progetto (tutti gli ammontari, in dollari, corrispondono a migliaia). Inoltre, i progetti 2 e 6 richiedono skill specializzate, che solo uno dei programmatori nel team dei 20 disponibili possiede. Segue che non è possibile sviluppare entrambi i progetti.

Si formuli in termini di PLI il problema di decidere quali progetti sviluppare per massimizzare il ricavo della compagnia, considerando il vincolo relativo al numero di programmatori disponibili, il vincolo di budget, e il vincolo sulle skill specializzate per i progetti 2 e 6.

Progetto	Programmatori richiesti	Capitale necessario	Ricavo stimato
1	7	250	650
2	6	175	550
3	9	300	600
4	5	150	450
5	6	145	375
6	4	160	525
7	8	325	750

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrcc} \max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & +2x_6 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo depth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima nel caso in cui la capacità dello zaino fosse 11 invece che 12. (*Nota*: nell'ordinamento CUD delle variabili, in caso di rapporti uguali si ordinino le variabili di ugual rapporto per indice crescente.)