RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

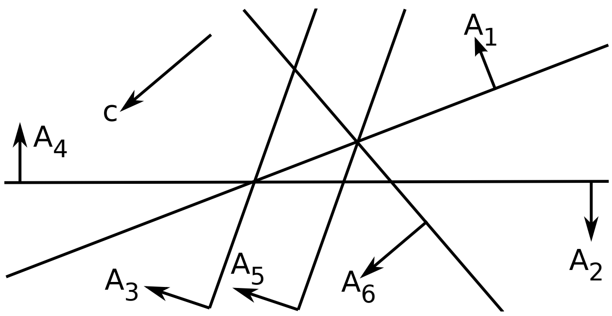
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

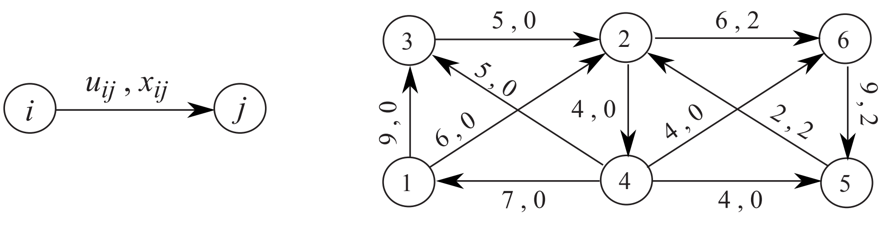
$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 2x_1 & - & 2x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & & & \leq & 4
\end{array}
$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3,4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: i) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; ii) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

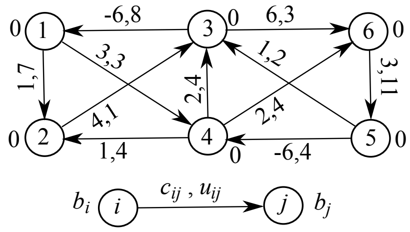
2) Si risolva graficamente il problema di PL in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1,2\}$. Si noti che le tre coppie c e A_6, A_3 e A_5, e A_2 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. In caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale.



3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se il flusso determinato sarebbe ancora ottimo nel caso in cui l'arco $(5,2)$ avesse capacità $u_{52} = 4$.



4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo, per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso nullo. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare le risposte.



5) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo Branch and Bound che usa il rilassamento MS1T, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visiti l'albero delle decisioni in modo depth-first, ossia si implementi Q come una pila (o stack). Considerando il caso $r = 3$, si inseriscano in Q i figli del nodo i selezionato, avente grado 3 nell'MS1T, in ordine decrescente di j, dove (i, j) è l'arco la cui variabile è fissata a zero. Si ricordi che, essendo Q una pila, i nodi vengono estratti in ordine inverso rispetto a quello di inserzione. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni, compreso il nodo radice. Al termine si indichi la migliore valutazione superiore determinata, giusticando tutte le risposte.