RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

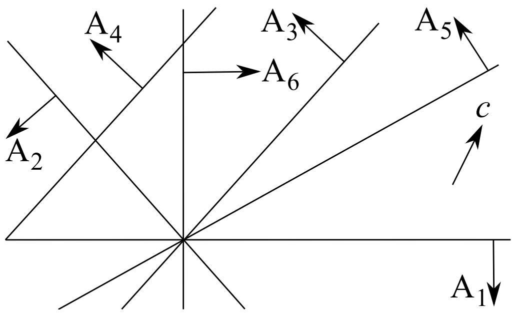
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

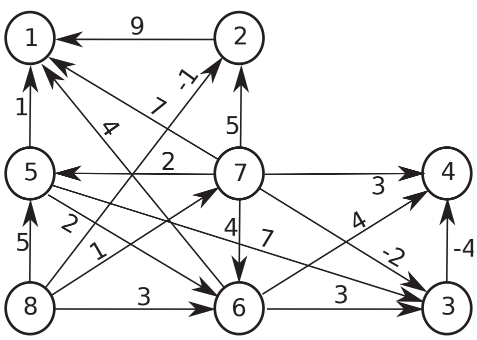
$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 4y_1 & + & 4y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & - & 2y_5 & & \\
 & & & y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & - & y_5 & = & 1 \\
 & y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & & & + & y_5 & = & 2 \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & , & y_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Si formuli il suo duale, ovvero il problema primale, e lo si risolva applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il vettore η_B, il passo di spostamento e l'indice uscente, giustificando le risposte. Al termine, in caso di ottimo finito, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime primali. Giustificare le risposte.

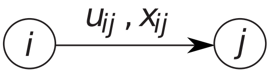
2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$; si noti che A_3 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, gli indici uscente ed entrante, e la degenerazione primale e duale, giustificando le risposte. Al termine, se il problema ammette ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima sia del primale che del duale, giustificando le risposte.

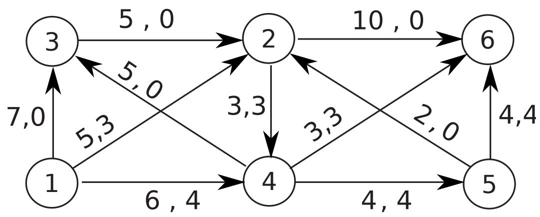


3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri poi il caso in cui il costo dell'arco $(5, 1)$ sia un parametro reale α, e si discuta per quali valori del parametro la soluzione determinata resta un albero dei cammini minimi di radice 8, giustificando la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 7$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte finali se l'arco $(1,2)$ avesse capacità $u_{12} = 6$.





5) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\max & 9x_1 & +6x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\
 & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.