RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

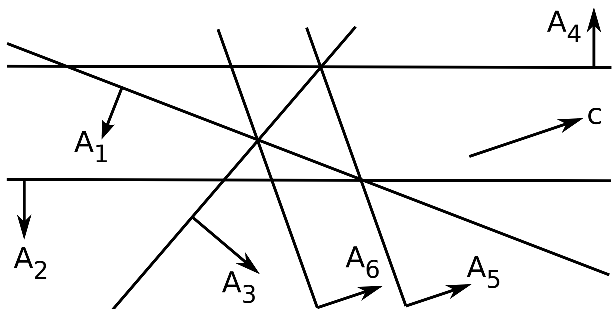
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

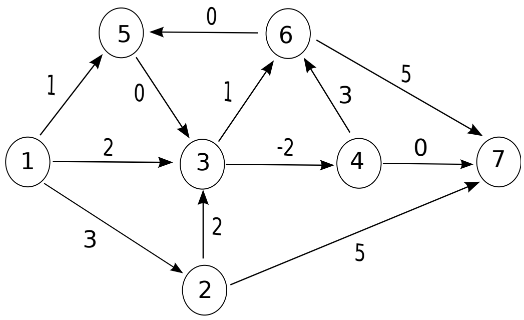
$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -4x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del PL dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione ξ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[-2, 2]$ invece che $[-4, 2]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

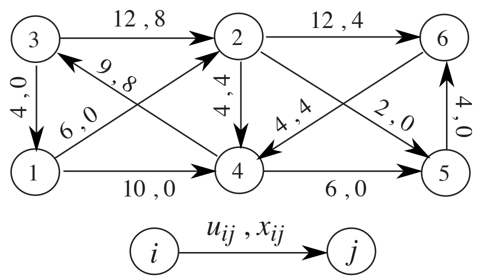
2) Si risolva graficamente il problema di PL in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 5\}$; si noti che c, A_5 e A_6 sono collineari, come pure A_2 e A_4. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base visitate. In caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni ottime individuate, primale e duale.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri quindi il caso in cui il costo dell'arco $(4, 7)$ sia un parametro reale ϵ, invece di valere 0, e si discuta l'ottimalità e l'unicità dell'albero determinato al variare di ϵ. Giustificare tutte le risposte.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, $(1,2)$ è visitato prima di $(1,3)$). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte finali qualora l'arco $(3,1)$ cambiasse verso, ossia divenisse $(1,3)$.



5) Si consideri la seguente istanza del problema dello zaino binario:

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
\max 8x_1 & +16x_2 & +7x_3 & +5x_4 & +x_5 & +2x_6 & & \\
3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 15 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

1. Si fornisca sia una valutazione superiore del valore ottimo, risolvendo il rilassamento continuo, che una valutazione inferiore, applicando l'euristica greedy CUD.
2. Si consideri il caso in cui il costo del sesto oggetto sia 1 invece che 2: qual è il valore ottimo dell'istanza modificata?

6) Si applichi all'istanza di TSP in figura un algoritmo Branch and Bound che usa 1MST come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'1MST in esso incidenti, creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una fila. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni, compreso il nodo radice. Al termine si riporti la miglior valutazione superiore determinata per il valore ottimo del problema, giustificando tutte le risposte.