RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

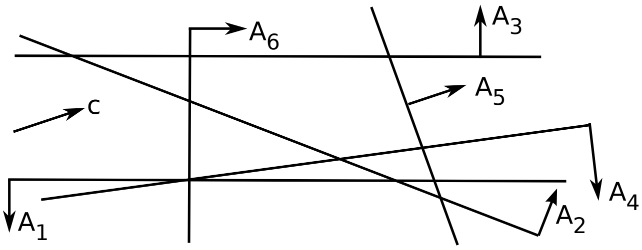
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

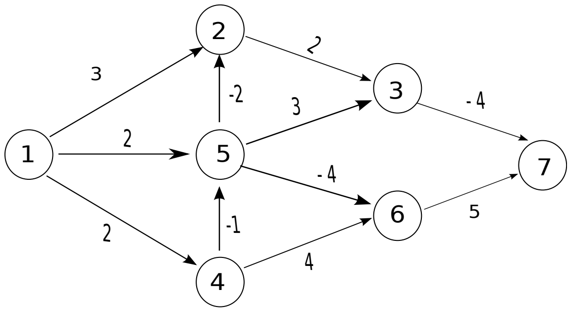
$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & - & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica, giustificando la risposta.

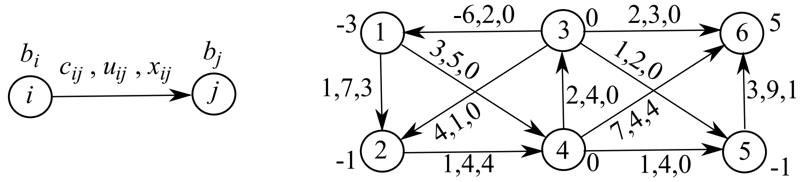
2) Si risolva graficamente il problema di *PL* in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2, 5\}$; si noti che c ed A_5 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, se è stata determinata una soluzione ottima finita se ne discuta l'unicità.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.



4) Considerando il problema di flusso di costo minimo definito sull'istanza in figura, si verifichi se il flusso riportato, di costo $cx = 38$, sia una soluzione ottima per il problema, giustificando la risposta. Nel caso in cui tale soluzione non sia ottima, si modifichi l'istanza in modo tale che il flusso riportato risulti di costo minimo per l'istanza modificata, giustificando la risposta.



5) Si applichi l'algoritmo Branch&Bound alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
\max & x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & + & 10x_5 & + & 2x_6 & & \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & + & 3x_6 & \leq & 8 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

utilizzando il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria, visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visitando per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se viene eseguita) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello); al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

6) Data la coppia asimmetrica di problemi di PL:

$$\text{(P)} \max\{cx : Ax \leq b\} \text{ e (D)} \min\{yb : yA = c, y \geq 0\},$$

dimostrare che, se durante un'iterazione dell'algoritmo del Simplesso Primale, relativa ad una data base B, si ottiene $A_N \xi \leq 0$, allora (D) risulta vuoto.