

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)**Nome:****Cognome:****Matricola:**

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & x_1 & + & 2x_2 \\
 & & & x_2 \leq 4 \\
 & x_1 & & \leq 2 \\
 & x_1 & - & 2x_2 \leq 5 \\
 & 2x_1 & + & x_2 \leq 6 \\
 & -x_1 & & \leq -4
 \end{array}$$

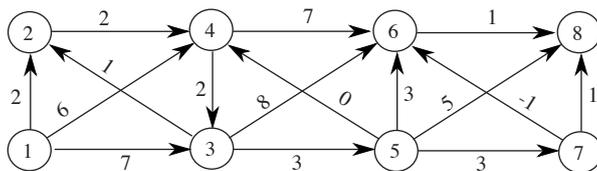
Si applichi l'algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h , giustificando le risposte. In caso di ottimo non finito, qual è la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

2) Si consideri il seguente problema di P.L., parametrico in $\alpha \in \mathfrak{R}$:

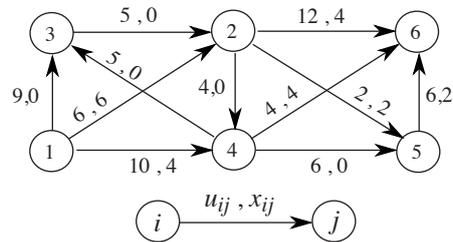
$$\begin{array}{rcll}
 \max & x_1 & + & x_2 \\
 & -x_1 & + & x_2 \leq 1 \\
 & 2x_1 & - & x_2 \leq 1 \\
 (P_\alpha) & \alpha x_1 & + & x_2 \leq 5 \\
 & -x_1 & & \leq 0 \\
 & & & -x_2 \leq 0
 \end{array}$$

Si determini per quali valori di α la soluzione di base duale associata alla base $B = \{1, 2\}$ sia ottima per il problema duale, discutendo l'unicità di tale soluzione al variare di α . Per quali valori di α il problema (P_α) potrebbe essere superiormente illimitato? Giustificare le risposte.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Si esaminino gli archi della stella uscente in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima ottenuta è unica? Giustificare la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 10$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine l'unicità del taglio di capacità minima determinato.



5) Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, si riformuli il seguente modello matematico

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \max\{3x_1 - x_2, x_1 + x_2\} \\
 & x_1 \in \{0, 1\} \\
 & 0 \leq x_2 \leq 100 \\
 & x_1 = 0 \implies x_2 = 100
 \end{aligned}$$

come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 1x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 9x_5 + 3x_6 \\
 & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 \leq 7 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.