RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrrrl} \max & 3x_1 & +6x_2 & & \\ & x_1 & +2x_2 & & \leq 5 \\ & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\ & -x_1 & & & \leq 0 \\ & & & -x_3 & \leq 0 \end{array}$$

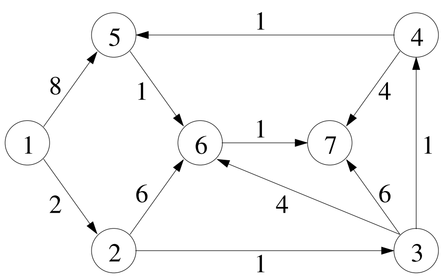
Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si dimostri che la soluzione $\overline{x} = (1, 2, 1)$ è ottima per il problema, e si individui l'insieme delle soluzioni duali ottime. $\overline{x}$ è l'unica soluzione ottima primale? Giustificare le risposte.

2) Si consideri il seguente problema di P.L.:

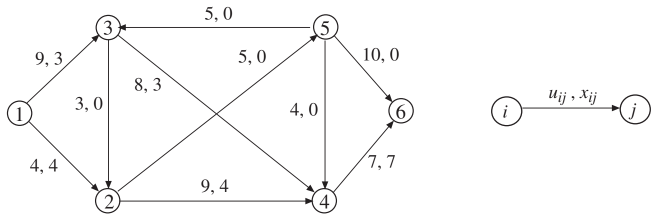
$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & & & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si indichi poi come cambierebbe la risposta finale qualora i lati destri del terzo e del quarto vincolo diventassero 1 e -2, rispettivamente, giustificando la risposta.

3) Si determini un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ per il grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più efficiente dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, l'insieme Q (se utilizzato), i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Infine, si discuta ottimalità e unicità della soluzione ottenuta nel caso in cui nel grafo fosse presente anche l'arco $(7, 5)$, considerando sia lo scenario in cui $c_{75} = -2$ che lo scenario in cui $c_{75} = -3$. Giustificare le risposte.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 7$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si riporti il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si indichi infine quale sarebbe il valore del flusso massimo se il nodo destinazione fosse il nodo 5 anzichè il nodo 6, giustificando la risposta.



5) Si fornisca un'istanza del problema SPT per la quale, applicando l'algoritmo di Dijkstra a partire da un nodo radice r, almeno un nodo venga inserito in Q più di una volta.

6) Lo studente Mario Telecronica deve partire per un soggiorno Erasmus. Individua sei oggetti, a lui cari, che vorrebbe portare con sé: a ciascuno assegna un valore affettivo, riportato nella seguente tabella

oggetto	1	2	3	4	5	6
valore affettivo	9	6	3	5	3	1
peso	4	3	2	4	3	2

Il peso degli oggetti è pure riportato in tabella. Sapendo che il trolley destinato a trasportare questi oggetti ha capacità 15, si formuli in termini di PLI il problema di scegliere quali oggetti portare, rispettando la capacità del trolley e massimizzando il valore affettivo totale degli oggetti prescelti.

Si risolva quindi il problema di Mario Telecronica mediante l'algoritmo Branch&Bound. Si utilizzi un rilassamento, un'euristica ed una regola di branching adeguate al problema formulato. Inoltre, si visiti l'albero di enumerazione in modo breadth-first. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching e come, o se il nodo viene chiuso e perchè.