Stime & Test statistici

Corso di Simulazione

Anno accademico 2009/10

Media campionaria

$X_1, X_2, ..., X_n$ *v.c.* indipendenti con distribuzione F, e:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \mu \\ Var[X_i] &= \sigma^2, i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Media campionaria: $$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$\overline{X}_n$ è uno stimatore di μ.

Media campionaria

$X_1, X_2, ..., X_n$ *v.c.* indipendenti con distribuzione F, e:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \mu \\ Var[X_i] &= \sigma^2, i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Media campionaria: $$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$\overline{X}_n$ è uno stimatore di μ.
È uno stimatore corretto:

$$E[\overline{X}_n] = \mu.$$

Risulta poi

$$Var[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\sigma^2$$

Varianza campionaria

Uno stimatore corretto della varianza σ^2 è

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1}$$

Varianza campionaria

Uno stimatore corretto della varianza σ^2 è

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}(n-1)E[S_n^2] &= E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] - nE[\overline{X}_n^2]\end{aligned}$$

Varianza campionaria

$$(n-1)E[S_n^2] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] - nE[\overline{X}_n^2]$$

Dalla

$$E[X_i^2] = Var[X_i] + E[X_i]^2,$$

Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned}
(n-1)E[S_n^2] &= \sum_{i=1}^{n}(Var[X_i] + E[X_i]^2) - n(Var[\overline{X}_n] + E[\overline{X}_n]^2) \\
&= n\sigma^2 + n\mu^2 - n\frac{\sigma^2}{n} - n\mu^2 \\
&= (n-1)\sigma^2.
\end{aligned}$$

Intervalli di confidenza

Quanto è accurata la stima di μ fornita dalla media campionaria $\overline{X}_n$?
Per il teorema del limite centrale, per n opportunamente grande, è

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \dot{\sim} N(0,1),$$

La stessa cosa vale se sostituiamo σ, che non conosciamo, con la sua stima S_n.

Se Z è una *v.c.* normale standard, per ogni $\alpha \in (0,1)$, indichiamo con z_α il valore per cui è

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha.$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$P(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} < z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha,$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$P(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} < z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$P(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\mu - \overline{X}_n}{S_n} < z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha,$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$P(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} < z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$P(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\mu - \overline{X}_n}{S_n} < z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha,$$

$$\Downarrow$$

$$P(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}) \approx 1 - \alpha,$$

Con probabilità $1 - \alpha$, il valore μ incognito si trova nell'intervallo

$$\overline{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Ad esempio: $P(Z < 1.96) = 0.975$
Quindi la probabilità che la media campionaria $\overline{X}_n$ differisca da μ di più di $1.96 \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ è circa 0.05.

Calcolo ricorsivo della media

Si voglia stimare la media della v.c. X in modo che la probabilità che di fare un errore maggiore di d sia pari ad α.
Se c è il reale per cui risulta $P(Z < c) = 1 - \alpha/2$, si generano successive realizzazioni di X fino ad averne un numero k tale che risulti $c\frac{S_k}{\sqrt{k}} < d$. (È comunque opportuno che il valore di k non sia inferiore a 30).
Per realizzare in modo efficiente il calcolo è opportuno disporre di formule ricorsive per il calcolo di $\overline{X}_k$ e di S_k^2.

$$\begin{aligned}
\overline{X}_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} X_j \\
&= \overline{X}_k - \overline{X}_k + \frac{k\overline{X}_k + X_{k+1}}{k+1} \\
&= \overline{X}_k + \frac{X_{k+1} - \overline{X}_k}{k+1}
\end{aligned}$$

Calcolo ricorsivo della varianza (1)

$$
\begin{aligned}
S^2_{k+1} &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(X_j - \overline{X}_{k+1})^2}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - \overline{X}_k + \overline{X}_k - \overline{X}_{k+1})^2}{k} + \frac{(X_{k+1} - \overline{X}_{k+1})^2}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - \overline{X}_k)^2 + (\overline{X}_k - \overline{X}_{k+1})^2 + 2(X_j - \overline{X}_k)(\overline{X}_k - \overline{X}_{k+1})}{k} \\
&\quad + \frac{(X_{k+1} - \overline{X}_{k+1})^2}{k} \\
&= (1 - \frac{1}{k}) S^2_k + (\overline{X}_k - \overline{X}_{k+1})^2 + \frac{(X_{k+1} - \overline{X}_{k+1})^2}{k},
\end{aligned}
$$

$(\sum_{j=1}^{k}(X_j - \overline{X}_k) = 0)$

Calcolo ricorsivo della varianza (2)

$$S^2_{k+1} = (1 - \tfrac{1}{k})S^2_k + (\overline{X}_k - \overline{X}_{k+1})^2 + \frac{(X_{k+1} - \overline{X}_{k+1})^2}{k}$$

Essendo

$$\begin{aligned} X_{k+1} - \overline{X}_{k+1} &= \frac{(k+1)X_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} X_j}{k+1} \\ &= \frac{kX_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} X_j}{k+1} \\ &= \frac{kX_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}[(k+1)X_j - kX_j]}{k+1} \\ &= k(\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k) \end{aligned}$$

si ha $$S^2_{k+1} = (1 - \tfrac{1}{k})S^2_k + (1+k)(\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k)^2$$

Massima verosimiglianza

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ osservazioni indipendenti della variabile casuale X, con funzione di densità $f_\theta(x)$, dove con θ si è indicato il parametro che caratterizza la distribuzione.
Si vuole stimare θ.
Funzione di verosimiglianza:

$$L(\theta) = f_\theta(X_1) f_\theta(X_2) \ldots f_\theta(X_n)$$

Il *metodo della massima verosimiglianza* consiste nello scegliere come stimatore il valore di θ che massimizza $L(\theta)$.

Interpretazione di $L(\theta)$

Nel caso di distribuzioni discrete, è la probabilità di avere ottenuto il campione $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Nel caso di distribuzioni continue la probabilità che l'estrazione casuale di un elemento da una popolazione con la distribuzione data sia un valore compreso in un'intorno di raggio $\varepsilon/2$ di X_i è approssimativamente $\varepsilon f_\theta(X_i)$, con un'approssimazione tanto più accurata quanto più piccolo è ε.

Pertanto $L(\theta)$ è approssimativamente proporzionale alla probabilità dell'estrazione di un campione di n elementi, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, con $Y_i \in [X_i - \varepsilon, X_i + \varepsilon]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e con ε opportunamente piccolo.

Massima verosimiglianza: esempio 1

Si voglia stimare con il metodo della massima verosimiglianza il parametro λ di una esponenziale. Si ha

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= (\lambda e^{-\lambda X_1})(\lambda e^{-\lambda X_2}) \ldots (\lambda e^{-\lambda X_n}) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda n \overline{X}_n} \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = n\lambda^{n-1} e^{-\lambda n \overline{X}_n} - \lambda^n n \overline{X}_n e^{-\lambda n \overline{X}_n} = 0$$

Massima verosimiglianza: esempio 1

Si voglia stimare con il metodo della massima verosimiglianza il parametro λ di una esponenziale. Si ha

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= (\lambda e^{-\lambda X_1})(\lambda e^{-\lambda X_2}) \ldots (\lambda e^{-\lambda X_n}) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda n \overline{X}_n} \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = n\lambda^{n-1} e^{-\lambda n \overline{X}_n} - \lambda^n n \overline{X}_n e^{-\lambda n \overline{X}_n} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

Massima verosimiglianza: esempio 2

X uniforme in $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$

$$f(x;\theta) = I_{[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]}(x)$$

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]}(x_i)$$

Massima verosimiglianza: esempio 2

X uniforme in $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$

$$f(x;\theta) = I_{[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]}(x)$$

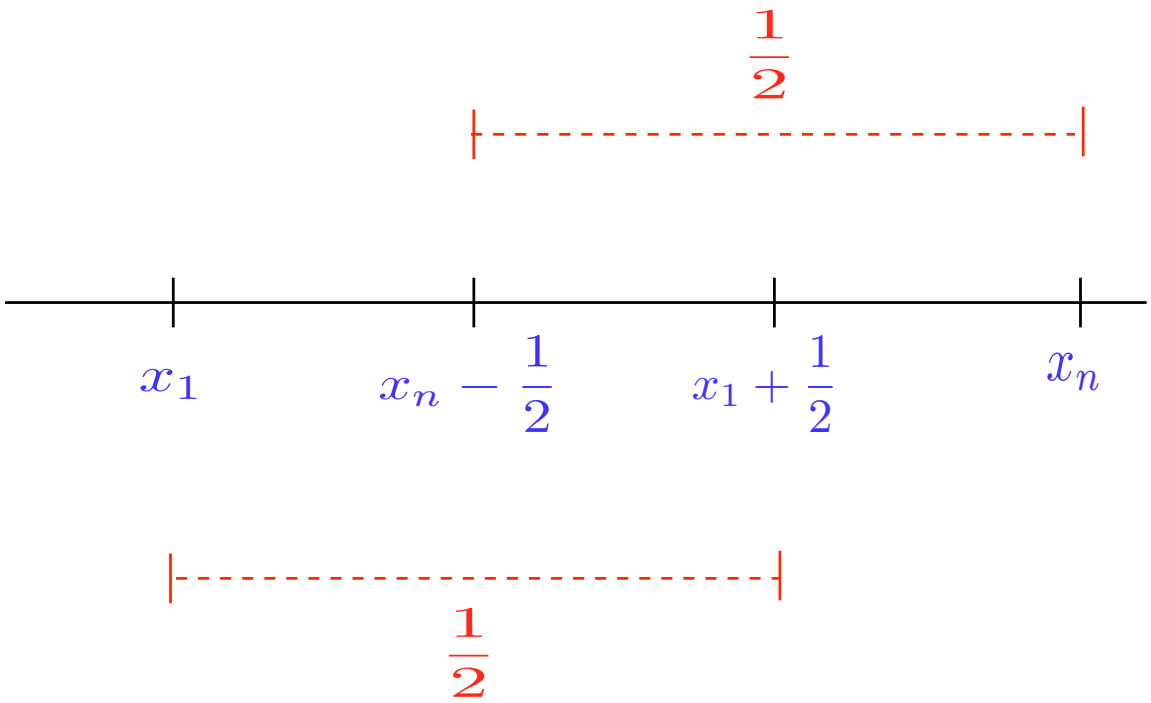
$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]}(x_i)$$

$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una funzione che vale 1 se è $x_i \in [\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$ e 0 altrimenti. Quindi:

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = I_{[x_n-\frac{1}{2},x_1+\frac{1}{2}]}(\theta)$$

Massima verosimiglianza: esempio 2



L assume il massimo valore per $\theta \in [x_n - \frac{1}{2}, x_1 + \frac{1}{2}]$

Massima verosimiglianza: esempio 3

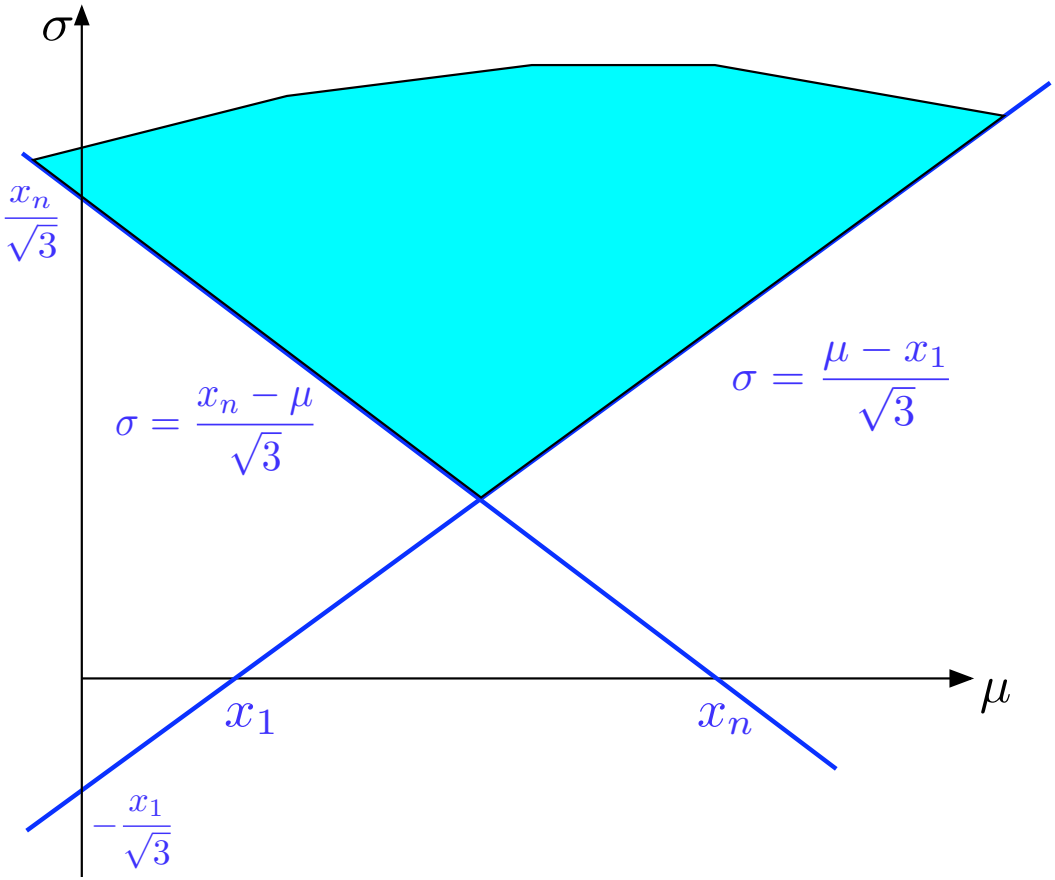
Assumiamo che X sia uniforme, ma non conosciamo né gli estremi né l'ampiezza dell'intervallo.

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow b - a = 2\sqrt{3}\sigma$$

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma} I_{[\mu-\sqrt{3}\sigma,\mu+\sqrt{3}\sigma]}(x)$$

Massima verosimiglianza: esempio 3

$$
\begin{aligned}
L(\mu, \sigma; x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma} I_{[\mu-\sqrt{3}\sigma, \mu+\sqrt{3}\sigma]}(x_i) \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^n I_{[\mu-\sqrt{3}\sigma, x_n]}(x_1) I_{[x_1, \mu+\sqrt{3}\sigma]}(x_n) \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^n I_{[\frac{\mu-x_1}{\sqrt{3}}, +\infty]}(\sigma) I_{[\frac{x_n-\mu}{\sqrt{3}}, +\infty]}(\sigma)
\end{aligned}
$$



La funzione $L(\mu, \sigma)$ vale $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^n$ nell'area che si trova sopra le due rette e 0 altrove. Il massimo si ha allora quando σ è minimo, cioè in corrispondenza dell'incrocio fra le rette:

$$\hat{\mu} = \frac{x_n + x_1}{2} \qquad \hat{\sigma} = \frac{x_n - x_1}{2\sqrt{3}}$$

Massima verosimiglianza: proprietà

Invarianza

Sia data una funzione di densità $f(x, \theta)$, con θ scalare, e sia $\bar{\theta}$ la stima di θ fornita dal metodo della massima verosimiglianza. Se $g(.)$ è una funzione invertibile, allora lo stimatore di $g(\theta)$ fornito dal metodo della massima verosimiglianza è $g(\bar{\theta})$.

Massima verosimiglianza: proprietà

Invarianza

Sia data una funzione di densità $f(x, \theta)$, con θ scalare, e sia $\bar{\theta}$ la stima di θ fornita dal metodo della massima verosimiglianza. Se $g(.)$ è una funzione invertibile, allora lo stimatore di $g(\theta)$ fornito dal metodo della massima verosimiglianza è $g(\bar{\theta})$.

Esempio:

Se $\bar{\theta}$ è lo stimatore secondo la massima verosimiglianza della varianza di una data distribuzione $f(x)$, allora $\sqrt{\bar{\theta}}$ è lo stimatore secondo la massima verosimiglianza della deviazione standard di $f(x)$.

Errore quadratico medio

- $X_1, X_2, ..., X_n$: *v.c.* indipendenti con distribuzione F
- $\theta(F)$: parametro di F da stimare
- $g(X_1, X_2, ..., X_n)$: stimatore usato

Definiamo l'*Errore Quadratico Medio*:

$$EQM(F, g) = E_F[(g(X_1, X_2, ..., X_n) - \theta(F))^2].$$

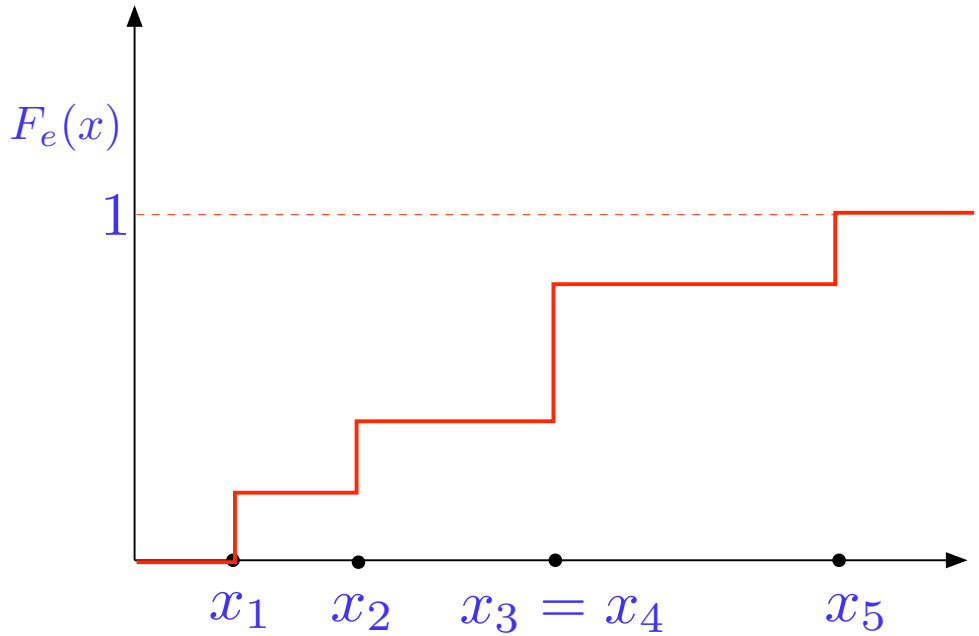
Come stimare $EQM(F, g)$, considerato che F non è nota?

Stima di $EQM(F, g)$

Sia $(x_1, x_2, ..., x_n)$ una realizzazione delle *v.c.* X_1, X_2, ..., X_n

Definiamo la variabile casuale discreta X_e che assume i valori $x_1, x_2, ..., x_n$ con funzione di distribuzione:

$$F_e(x) = \frac{|\{i : x_i \leq x\}|}{n}$$



Distribuzione empirica

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

$$F_e(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_{(1)} \\ \frac{j}{n}, & \text{se } x_{(j)} \leq x < x_{(j+1)} \\ 1, & \text{se } x_{(n)} \leq x \end{cases}$$

F_e è una *stima empirica* di F; per la legge dei grandi numeri, è

$$F_e(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(x).$$

$\theta(F_e)$ è una approssimazione di $\theta(F)$ e $EQM(F_e, g)$ è una approssimazione di $EQM(F, g)$:

$$EQM(F_e, g) = E_{F_e}[(g(X_1, X_2, ..., X_n) - \theta(F_e))^2]$$

L'approssimazione è tanto più buona quanto più è grande n

$\theta(F_e)$ è una approssimazione di $\theta(F)$ e $EQM(F_e, g)$ è una approssimazione di $EQM(F, g)$:

$$EQM(F_e, g) = E_{F_e}[(g(X_1, X_2, ..., X_n) - \theta(F_e))^2]$$

L'approssimazione è tanto più buona quanto più è grande n

In pratica però il calcolo di $EQM(F_e)$ può risultare notevolmente oneroso essendo

$$EQM(F_e, g) = \sum_{y \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}^n} \frac{(g(y) - \theta(F_e))^2}{n^n},$$

In pratica vengono generati k vettori $y \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}^n$, $y_1, y_2, ..., y_k$, e si pone

$$EQM(F_e) \simeq \sum_{i=1}^{k} \frac{(g(y_i) - \theta(F_e))^2}{k}.$$

Infatti le $(g(y_i) - \theta(F_e))^2$ possono essere considerate come valori assunti da variabili casuali indipendenti con media $EQM(F_e)$, e quindi la loro media è una stima corretta di $EQM(F_e)$

Test di ipotesi: Chi-Quadro per distribuzioni discrete

X *v.c.* discreta che rassume valori 1, 2, . . . , k
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ realizzazioni di X
Ipotesi H_0 (*ipotesi nulla*):

$$H_0 : P[X = i] = p_i, i = 1, ..., k$$

dove $p_1, p_2, ..., p_k$ sono valori dati con somma 1.

$$N_i = |\{j : x_j = i\}|, i = 1, ..., k$$

Sotto l'ipotesi H_0, N_i ha distribuzione binomiale con parametri n e p_i, per ogni i, e quindi ha media np_i. Costruiamo l'indicatore T così definito:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

Più grande è T meno è probabile che l'ipotesi H_0 sia corretta. Per n grande, T ha approssimativamente una distribuzione *Chi-Quadro* con $k - 1$ gradi di libertà

$$P_{H_0}[T \geq t] \cong P[\chi^2_{k-1} \geq t]$$

Distribuzione χ^2_k

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0 \quad [t \text{ intero } \rightarrow \Gamma(t) = (t-1)!]$$

Distribuzione χ^2_k

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0 \quad [t \text{ intero } \rightarrow \Gamma(t) = (t-1)!]$$

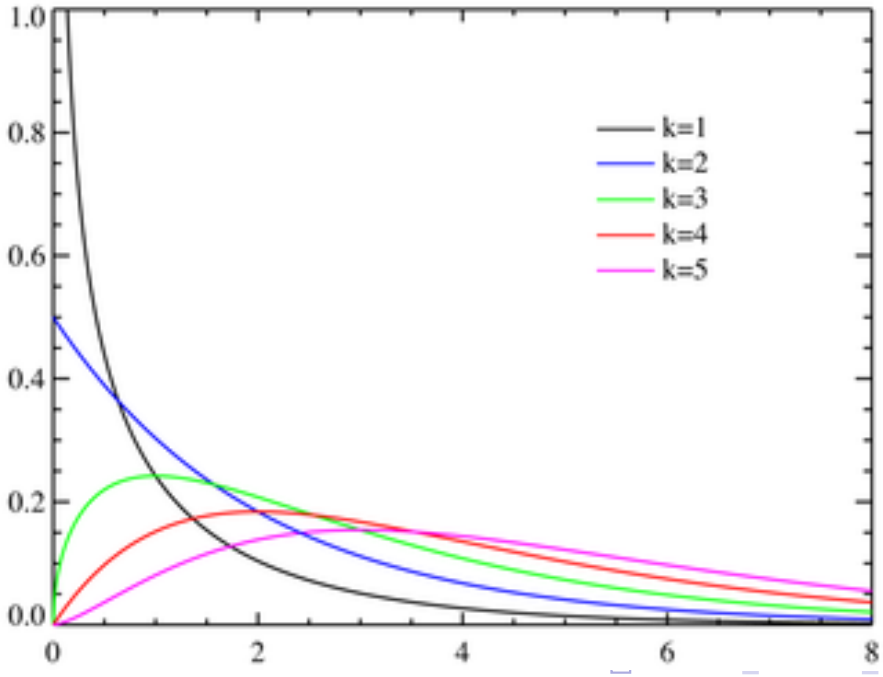
$$\begin{aligned} E[X] &= k \\ Var[X] &= 2k \end{aligned}$$

Distribuzione χ^2_k

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0 \quad [t \text{ intero } \rightarrow \Gamma(t) = (t-1)!]$$

$$\begin{aligned} E[X] &= k \\ Var[X] &= 2k \end{aligned}$$



Distribuzione Gamma(α, β)

La distribuzione Chi-Quadro è un caso particolare della distribuzione generale Gamma(α, β):

$$f_X(x) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} I_{(0,\infty)}(x)$$

La Chi-Quadro con k gradi di libertà è una Gamma(k/2,2).
Per α intero la Gamma(α, β) diventa la distribuzione Gamma già vista con parametri $n = \alpha$ e $\lambda = 1/\beta$.

Se è t il valore assunto da T, $P[\chi^2_{k-1} \geq t]$ fornisce la probabilità di errore nel caso che si decida di scartare l'ipotesi H_0.
Ad esempio, un valore che può essere ragionevole per rigettare l'ipotesi è $P[\chi^2_{k-1} \geq t] = 0.05$ (oppure più conservativamente 0.01).
Una più accurata approssimazione del valore $P_{H_0}[T \geq t]$ può essere ottenuta per mezzo di una simulazione. Si generano a questo scopo le variabili casuali $T^{(1)}, T^{(2)}, ..., T^{(r)}$, ciascuna con la distribuzione di T sotto l'ipotesi H_0, e si pone

$$P_{H_0}[T \geq t] \cong \frac{\left|\{j : T^{(j)} \geq t\}\right|}{r}$$

Al crescere di r migliora la bontà dell'approssimazione.

Distribuzioni continue

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili indipendenti, identicamente distribuite
H_0: che abbiano una comune distribuzione continua F data.
Possiamo ricondurci al caso discreto suddividendo l'insieme dei possibili valori assunti dalle X_i in k intervalli distinti

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{k-2}, x_{k-1}), (x_{k-1}, +\infty).$$

Si considerano le *v.c.* discrete X_i^d con $X_i^d = i$ se X_i si trova nell'intervallo (x_{i-1}, x_i), e l'ipotesi H_0 diviene
$P[X_i^d = i] = F(x_i) - F(x_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$.

Test di Kolmogorov-Smirnov per distribuzioni continue

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili indipendenti, identicamente distribuite
H_0: che abbiano una comune distribuzione continua F data.
F_e approssimazione della F:

$$F_e(x) = \frac{|\{i : X_i \leq x\}|}{n}$$

Se l'ipotesi H_0 è corretta allora $F_e(x)$ è una buona approssimazione di $F(x)$. Una misura dello scostamento è

$$D = max_x \left| F_e(x) - F(x) \right| .$$

Dati i valori osservati $x_1, \ldots, x_n$ di $X_1, \ldots, X_n$, ricaviamo il valore osservato d di D.

$$d = Max_x\{F_e(x) - F(x), F(x) - F_e(x)\}$$

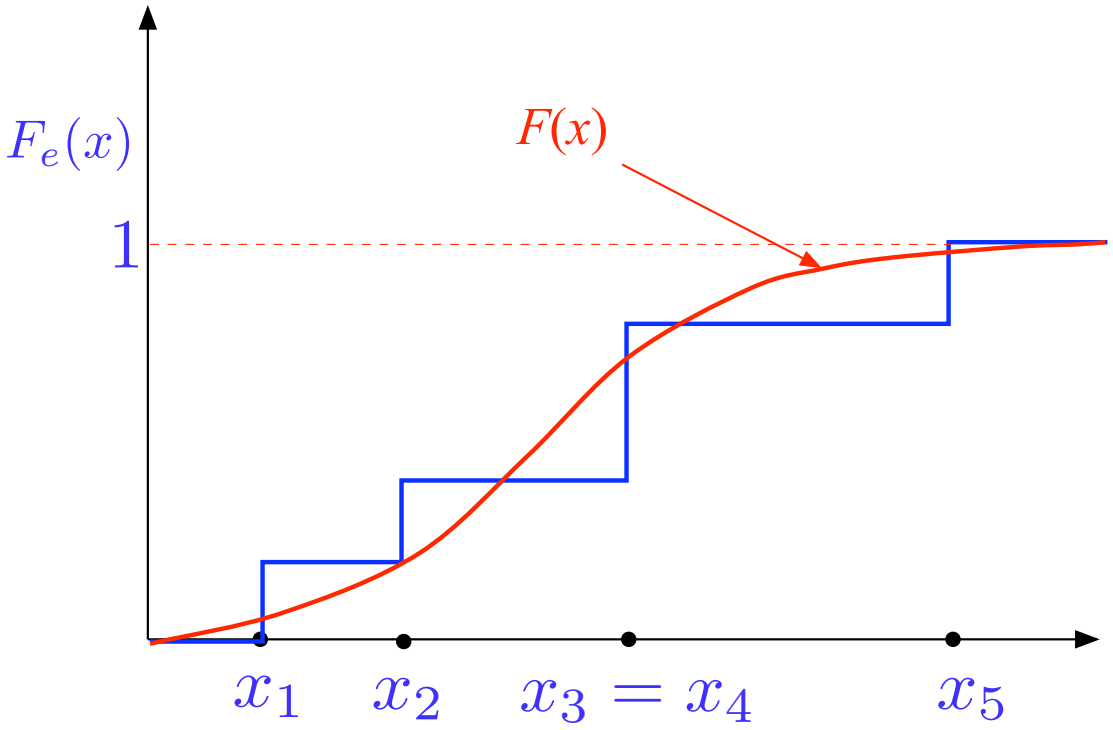
$P_F(D \geq d)$: probabilità di fare un errore se decidiamo di rigettare H_0.

$$Max_x\{F_e(x) - F(x)\} = Max\{\frac{j}{n} - F(x_{(j)}) : j = 1 \dots n\},$$

$$Max_x\{F(x) - F_e(x)\} = Max\{F(x_{(j)}) - \frac{j-1}{n} : j = 1 \dots n\},$$

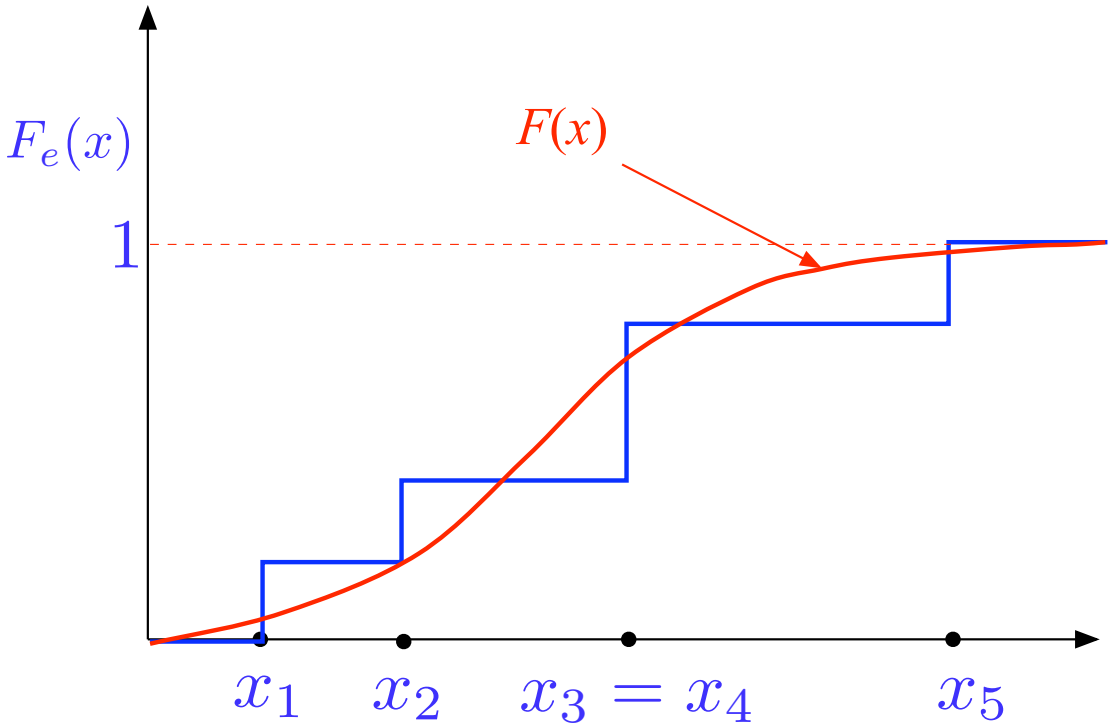
$$Max_x\{F_e(x) - F(x)\} = Max\{\frac{j}{n} - F(x_{(j)}) : j = 1 \dots n\},$$

$$Max_x\{F(x) - F_e(x)\} = Max\{F(x_{(j)}) - \frac{j-1}{n} : j = 1 \dots n\},$$



$$Max_x\{F_e(x) - F(x)\} = Max\{\frac{j}{n} - F(x_{(j)}) : j = 1 \dots n\},$$

$$Max_x\{F(x) - F_e(x)\} = Max\{F(x_{(j)}) - \frac{j-1}{n} : j = 1 \dots n\},$$



$$d = max\left\{\frac{j}{n} - F(x_{(j)}), F(x_{(j)}) - \frac{j-1}{n} : j = 1, \dots n\right\}.$$

$$
\begin{aligned}
P_F[D \geq d\,] &= P\left[Max_x \left|\frac{|\{i : X_i \leq x\}|}{n} - F(x)\right| \geq d\right] \\
&= P\left[Max_x \left|\frac{|\{i : F(X_i) \leq F(x)\}|}{n} - F(x)\right| \geq d\right] \\
&= P\left[Max_x \left|\frac{|\{i : U_i \leq F(x)\}|}{n} - F(x)\right| \geq d\right]
\end{aligned}
$$

U_i, sono *v. c.* indipendenti uniformi in (0.1).
(Se X è una *v.c.* con distribuzione continua F, allora $F(X)$ è una *v.c.* uniforme in $(0, 1)$. Infatti, ponendo $Y = F(X)$ si ha $P[Y \leq y] = P[X \leq F^{-1}(y)] = y$.)

$$
P[D \geq d\,] = P\left[Max_{0 \leq y \leq 1} \left|\frac{|\{i : U_i \leq y\}|}{n} - y\right| \geq d\right].
$$

Stima di $P[D \geq d\,]$:

1. Si generano $u_1, u_2, \ldots, u_n$, uniformi in $(0,1)$,
2. Si calcola $Max_{0 \leq y \leq 1} \left| \frac{|\{i : u_i \leq y\}|}{n} - y \right| =$
   $Max \left\{ \frac{j}{n} - u_{(j)}, u_{(j)} - \frac{j-1}{n} : j = 1, ..., n \right\}$.

Si ripete più volte e si prende come valore per $P[D \geq d\,]$ la proporzione di volte in cui il valore trovato risulta $\geq d$.

Se $P[D \geq d]$ è sufficientemente basso (es. 0.05) l'ipotesi viene rigettata, altrimenti viene accettata.

Il test della somma dei ranghi

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$: valori osservati di una variabile V del sistema studiato.
(Le Y_i possono essere considerate come *v.c.* identiche e indipendenti)
$X_1, X_2, \ldots, X_n$: i valori forniti per V dalla simulazione in n run.
(Anche le X_i saranno *v.c.* identicamente distribuite e indipendenti, con distribuzione F, in generale non nota)
Ipotesi H_0: le Y_i abbiano la stessa distribuzione delle X_i, cioè

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$$

sono *v.c.* identicamente distribuite e indipendenti.

Ordiniamo le $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ in ordine crescente di valore e per $i = 1, \ldots, n$ sia R_i il rango di X_i, cioè la sua posizione nella lista ordinata.
Ad esempio se le sequenze sono:
$X : 20, 15, 38, 40, 35, 31$

$Y : 25, 30, 29, 34.$
Si ha
$R_1 = 2,\ R_2 = 1,\ R_3 = 9,\ R_4 = 10,\ R_5 = 8$ e $R_6 = 6.$

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

è un indicatore di plausibilità dell'ipotesi ($R = 36$ nell'esempio precedente)

Chiaramente un valore troppo piccolo o troppo grande di R falsificherebbe con alta probabilità l'ipotesi H_0. Supponendo di ritenere accettabile una probabilità α (ad es. 0.05) di sbagliare nel rigettare l'ipotesi, rigetteremo H_0 se risulta

$$2 \min \{P_{H_0}[R \leq r], P_{H_0}[R \geq r]\} \leq \alpha.$$

Come determinare la distribuzione di R?

Ponendo $F_{n,m}(r) = P_{H_0}[R \leq r]$, vale la seguente equazione ricorsiva

$$F_{n,m}(r) = \frac{n}{n+m} F_{n-1,m}(r-n-m) + \frac{m}{n+m} F_{n,m-1}(r),$$

con

$$F_{1,0}(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r < 1 \\ 1, & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{0,1}(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r < 0 \\ 1, & \text{se } r \geq 0 \end{cases}$$

Si ha allora un sistema di equazioni ricorsive che consente di calcolare $F_{n,m}(r)$ e quindi la distribuzione di R.

In pratica il calcolo di $F_{n,m}(r)$ utilizzando la formula ricorsiva risulta molto oneroso. Si ricorre allora ad una approssimazione di $F_{n,m}(r)$. È possibile dimostrare che

$$\frac{R - \frac{n(n+m+1)}{2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}}$$

è, approssimativamente, per n ed m grandi, una normale standard, $N(0,1)$. Pertanto è

$$P[R \leq r] \cong P[Z \leq r*]$$

con Z una *v.c.* $N(0,1)$ e

$$r* = \frac{r - \frac{n(n+m+1)}{2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}}.$$

Modelli di processi di arrivo

Arrivi ad uno sportello, pacchetti in arrivo ad un server, chiamate in arrivo ad un call center, ...

- λ: numero medio di arrivi nell'unità di tempo,
- $N(t)$: il numero di arrivi nell'intervallo temporale [0, t].

Si parla di processi di Poisson, che possono essere sia stazionari che non stazionari.

Processo di Poisson stazionario

1. arriva un individuo alla volta, cioè non ci sono arrivi di gruppi di individui;
2. il numero di arrivi nell'intervallo $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t)$, è indipendente da $N(u)$, per ogni $u \in [0, t]$;
3. la distribuzione di $N(t+s) - N(t)$ è indipendente da t per ogni $(t, s) \geq 0$.

Processo di Poisson stazionario

1. arriva un individuo alla volta, cioè non ci sono arrivi di gruppi di individui;
2. il numero di arrivi nell'intervallo $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t)$, è indipendente da $N(u)$, per ogni $u \in [0, t]$;
3. la distribuzione di $N(t+s) - N(t)$ è indipendente da t per ogni $(t, s) \geq 0$.

Processo di Poisson stazionario

1. arriva un individuo alla volta, cioè non ci sono arrivi di gruppi di individui;
2. il numero di arrivi nell'intervallo $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t)$, è indipendente da $N(u)$, per ogni $u \in [0, t]$;
3. la distribuzione di $N(t+s) - N(t)$ è indipendente da t per ogni $(t, s) \geq 0$.

Processo di Poisson stazionario

1. arriva un individuo alla volta, cioè non ci sono arrivi di gruppi di individui;
2. il numero di arrivi nell'intervallo $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t)$, è indipendente da $N(u)$, per ogni $u \in [0, t]$;
3. la distribuzione di $N(t+s) - N(t)$ è indipendente da t per ogni $(t, s) \geq 0$.

$$P[N(t+s) - N(t) = k] = \frac{e^{\lambda s}(\lambda s)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad t, s \geq 0,$$

Processo di Poisson non stazionario

In molti casi reali il numero medio di arrivi nell'unità di tempo non è indipendente dal tempo. Sostituiamo allora alla costante λ una funzione del tempo $\lambda(t)$.

1. arriva un individuo alla volta, cioè non ci sono arrivi di gruppi di individui;
2. il numero di arrivi nell'intervallo $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t)$, è indipendente da $N(u)$, per ogni $u \in [0, t]$.

Processo di Poisson non stazionario

In molti casi reali il numero medio di arrivi nell'unità di tempo non è indipendente dal tempo. Sostituiamo allora alla costante λ una funzione del tempo $\lambda(t)$.

1. arriva un individuo alla volta, cioè non ci sono arrivi di gruppi di individui;
2. il numero di arrivi nell'intervallo $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t)$, è indipendente da $N(u)$, per ogni $u \in [0, t]$.

$$P[N(t+s)-N(t) = k] = \frac{e^{b(t,s)}\, b(t,s)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad t, s \geq 0.$$

- $\Lambda(t) = E[N(t)]$
- $b(t,s) = \Lambda(t+s) - \Lambda(t)$

Se $\Lambda(t)$ è differenziabile si ha:

- $\lambda(t) = \frac{d\Lambda(t)}{dt}$
- $b(t,s) = \Lambda(t+s) - \Lambda(t) = \int_t^{t+s} \lambda(y)dy$

Stima di $\lambda(t)$

Si abbiano i dati relativi agli arrivi nell'intervallo T di n giorni. Dividiamo l'intervallo T in p intervallini di uguale ampiezza Δ, $[t_1, t_2], [t_2, t_3], \ldots, [t_p, t_{p+1}]$.
Sia x_{ij} il numero di arrivi nell'intervallo i del giorno j. Possiamo allora calcolare la media del numero di arrivi in ciascuno degli intervallini:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_j x_{ij}}{n},$$

e di conseguenza costruire una approssimazione della funzione $\lambda(t)$:

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{\bar{x}_i}{\Delta}, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}], \;\; i = 1, 2, \ldots, p.$$

Arrivi a gruppi

Definiamo poi, per ogni gruppo i, la variabile casuale discreta, B_i, che può assumere valori 1, 2, ... Tale variabile definisce la cardinalità del gruppo.
Il numero di arrivi individuali entro il tempo t è allora dato dalla:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} B_i, \quad t \geq 0.$$