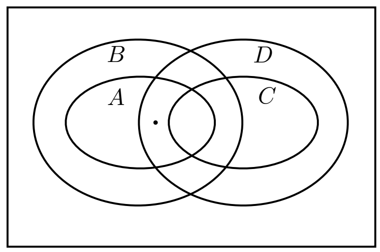
LMB - Informatica - Prova di esame del 2 Ottobre 2014

Attenzione: Questo documento presenta per ognuno degli esercizi proposti una possibile soluzione che sarebbe stata considerata corretta e ben valutata dai docenti. Naturalmente ci possono essere soluzioni corrette anche molto diverse da quelle proposte.

1. Fornire un controesempio alla congettura che

   "per ogni A,B,C,D tali che $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$ si ha $A \setminus C \subseteq B \setminus D$".

   Soluzione: Dai diagrammi di Eulero-Venn sotto le ipotesi $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$ si nota che A può contenere elementi che stanno in D ma non in C.

   Dato che questi elementi sono in A essi sono necessariamente in B. Quindi essi stanno in $A \setminus C$ ma non in $B \setminus D$. Un semplice controesempio alla congettura si ha prendendo $A = \{1\}$, $B = \{1\}$, $C = \varnothing$ e $D = \{1\}$. Infatti le ipotesi $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$ sono soddisfatte, ma $A \setminus C = \{1\} \not\subseteq \varnothing = B \setminus D$.

2. Sapendo che *"partecipi alla selezione solo se prima mandi la lettera"* e che *"non partecipi alla selezione"*, possiamo concludere che *"non hai mandato la lettera"*? Motivare la risposta formalizzando gli enunciati.

   Soluzione: Fissiamo i simboli proposizionali L per *"mandi la lettera"* e S per *"partecipi alla selezione"*. L'esercizio richiede di dimostrare se la seguente formula è una tautologia:

   $$A = (((S \Rightarrow L) \wedge \neg S) \Rightarrow \neg L)$$

   Se A non è una tautologia dobbiamo essere in grado trovare un'interpretazione che la rende falsa. Trattandosi di un'implicazione, questo è possibile solo se troviamo un'interpretazione che rende vera la premessa $((S \Rightarrow L) \wedge \neg S)$ e falsa la conclusione $\neg L$. Affinché $((S \Rightarrow L) \wedge \neg S)$ sia vera bisogna che S sia falsa e affinché $\neg L$ sia falsa bisogna che L sia vera. Per concludere resta da controllare che l'interpretazione $\{S \mapsto 0, L \mapsto 1\}$ renda vera la formula $(S \Rightarrow L)$, come infatti succede. Quindi abbiamo trovato un'interpretazione che rende falsa la formula A dimostrando che non è una tautologia.

3. Dimostrare, procedendo per sostituzione, che le seguenti formule proposizionali sono equivalenti:

   (a) $(P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P)))$

   (b) $((R \wedge P) \Rightarrow (Q \wedge (R \Rightarrow Q)))$

Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

$(P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \underline{(R \Rightarrow \neg P)}))$

$\equiv \quad \{$ (elim. implicazione) $\}$

$(P \Rightarrow \underline{(\neg Q \Rightarrow (\neg R \vee \neg P))})$

$\equiv \quad \{$ (elim. implicazione) $\}$

$(P \Rightarrow (\underline{\neg\neg Q} \vee (\neg R \vee \neg P)))$

$\equiv \quad \{$ (doppia negazione) $\}$

$(P \Rightarrow (Q \vee (\neg R \vee \neg P)))$

$\equiv \quad \{$ (elim. implicazione) $\}$

$(\neg P \vee \underline{(Q \vee (\neg R \vee \neg P))})$

$\equiv \quad \{$ (comm. + assoc.) $\}$

$(\neg P \vee ((Q \vee \neg P) \vee \neg R))$

$\equiv \quad \{$ (comm. + assoc.) $\}$

$(\underline{(\neg P \vee (\neg P \vee Q))} \vee \neg R)$

$\equiv \quad \{$ (assoc.) $\}$

$((\underline{(\neg P \vee \neg P)} \vee Q) \vee \neg R)$

$\equiv \quad \{$ (idempotenza) $\}$

$((\neg P \vee Q) \vee \neg R)$

$((R \wedge P) \Rightarrow (Q \wedge (R \Rightarrow Q)))$

$\equiv \quad \{$ (elim. implicazione) $\}$

$((R \wedge P) \Rightarrow \underline{(Q \wedge (\neg R \vee Q))})$

$\equiv \quad \{$ (assorbimento) $\}$

$((R \wedge P) \Rightarrow Q)$

$\equiv \quad \{$ (elim. implicazione) $\}$

$(\underline{\neg(R \wedge P)} \vee Q)$

$\equiv \quad \{$ (De Morgan) $\}$

$((\neg R \vee \neg P) \vee Q)$

$\equiv \quad \{$ (comm. + assoc.) $\}$

$(\neg P \vee (\neg R \vee Q))$

$\equiv \quad \{$ (comm. + assoc.) $\}$

$((\neg P \vee Q) \vee \neg R)$

4. Senza costruire l'intera tabella di verità, fornire due interpretazioni che dimostrano che la formula $((P \oplus Q) \Leftrightarrow (R \Rightarrow (Q \Rightarrow S)))$ è soddisfacibile e che non è una tautologia.

   Soluzione: Trattandosi di una doppia implicazione, per dimostrare che la formula è soddisfacibile basta fornire una interpretazione che renda vere entrambe le formule $(P \oplus Q)$ e $(R \Rightarrow (Q \Rightarrow S))$ (o entrambe false). Affinché $(P \oplus Q)$ sia vera basta prendere un'interpretazione che rende P vera e Q falsa e affinchè $(R \Rightarrow (Q \Rightarrow S))$ sia vera basta prendere un'interpretazione che rende R falsa: ad esempio l'interpretazione $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 0, R \mapsto 0, S \mapsto 1\}$ dimostra che la formula è soddisfacibile.

   Per dimostrare che non è una tautologia, dobbiamo trovare un'interpretazione che renda vera esattamente una tra $(P \oplus Q)$ e $(R \Rightarrow (Q \Rightarrow S))$. Abbiamo già visto che qualsiasi interpretazione che assegna falso a R rende vera la formula $(R \Rightarrow (Q \Rightarrow S))$ indipendentemente dai valori di verità assegnati a P e Q (e S), quindi basta prendere un'interpretazione che rende falsa $(P \oplus Q)$: ad esempio $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 1, R \mapsto 0, S \mapsto 1\}$.

   Riportiamo sotto le corrispondenti righe della tabella di verità.

P	Q	R	S	$((P$	$\oplus$	$Q)$	$\Leftrightarrow$	$(R$	$\Rightarrow$	$(Q$	$\Rightarrow$	$S)))$
1	0	0	1	1	1	0	**1**	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	**0**	0	1	1	1	1
				(1)	(2)	(1)	(4)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)

5. Formalizzare l'enunciato *"tutti gli amici di Alice sono amici di Bruno, ma Cosimo non ha amici"* utilizzando le tre costanti *Alice*, *Bruno* e *Cosimo* e il simbolo di predicato binario $amici(\_,\_)$, interpretati in modo standard sul dominio delle persone.

   Soluzione:

$$((\forall x\,.\,(amici(x, Alice) \Rightarrow amici(x, Bruno))) \wedge \neg(\exists y\,.\,amici(Cosimo, y)))$$

6. Dimostrare che le seguenti formule predicative sono logicamente equivalenti:

   (a) $\neg(\exists x\,.\,(\exists y\,.\,(P(x,y) \Rightarrow Q(y,x))))$

   (b) $\big(\forall y\,.\,\big((\forall x\,.\,P(x,y)) \wedge (\forall x\,.\,(Q(y,x) \Rightarrow \neg P(x,y)))\big)\big)$

   Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

$\neg(\exists x\,.\,(\exists y\,.\,(P(x,y) \Rightarrow Q(y,x))))$

$\equiv \quad$ { (De Morgan) }

$(\forall x\,.\,\underline{\neg(\exists y\,.\,(P(x,y) \Rightarrow Q(y,x)))})$

$\equiv \quad$ { (De Morgan) }

$(\forall x\,.\,(\forall y\,.\,\underline{\neg(P(x,y) \Rightarrow Q(y,x))}))$

$\equiv \quad$ { (elim. implicazione negata) }

$(\forall x\,.\,(\forall y\,.\,(P(x,y) \wedge \neg Q(y,x))))$

$$\big(\forall y\,.\,\underline{\big((\forall x\,.\,P(x,y)) \;\wedge\; (\forall x\,.\,(Q(y,x) \;\Rightarrow\; \neg P(x,y)))\big)}\big)$$

$\equiv$ { (distrib.) }

$$\big(\forall y\,.\,\big(\forall x\,.\,\big(P(x,y) \;\wedge\; (Q(y,x) \;\Rightarrow\; \neg P(x,y))\big)\big)\big)$$

$\equiv$ { (comm.) }

$$\big(\forall x\,.\,\big(\forall y\,.\,\big(P(x,y) \;\wedge\; \underline{(Q(y,x) \;\Rightarrow\; \neg P(x,y))}\big)\big)\big)$$

$\equiv$ { (elim. implicazione) }

$$\big(\forall x\,.\,\big(\forall y\,.\,\big(P(x,y) \;\wedge\; \underline{(\neg Q(y,x) \vee \neg P(x,y))}\big)\big)\big)$$

$\equiv$ { (comm.) }

$$\big(\forall x\,.\,\big(\forall y\,.\,\underline{\big(P(x,y) \;\wedge\; (\neg P(x,y) \vee \neg Q(y,x))\big)}\big)\big)$$

$\equiv$ { (complemento) }

$$\big(\forall x\,.\,(\forall y\,.\,(P(x,y) \wedge \neg Q(y,x)))\big)$$