La dimostrazione di Motwani e Raghavan sul numero di confronti di Randomized-Quicksort.

Insieme: $S[1..n]$. Rango: S_i è l'i-esimo elemento nell'ordinamento.

$p_{i,j}$ è la probabilità di un confronto tra S_i e S_j in un'esecuzione di Quicksort.

Il numero totale atteso di confronti per tutte le esecuzioni: $E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} p_{i,j}$.

Calcolare $p_{i,j}$ è **facilissimo**:

se $j = i+1$ i due elementi si confronatno tra loro sicuramente ($p_{i,i+1} = 1$) perché nessun altro elemento può porli in due sottoinsiemi separati ponendosi come perno tra loro;

in genere per $j \geq i+1$ si consideri il sottoinsieme A di elementi ordinati (ovviamente non ordinati nell'input) $A = \{S_i, S_{i+1}, \ldots, S_j\}$; finché è scelto come perno un elemento fuori di A, tutti gli elementi di A rimangono nella stessa partizione di Quicksort e quindi non si confrontano tra loro; se il primo elemento di A scelto come perno è S_i o S_j, i due ovviamente si confrontano; se il primo elemento di A scelto come perno è $S_k, k \neq i, j$, questo spedisce S_i, S_j in due partizioni diverse e i due non si confrontano più;

dunque $p_{i,j} = \frac{2}{j-i+1}$ (e infatti per $j = i+1$ si ha $p_{i,j} = 1$).

In conclusione:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \frac{2}{j-i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} \frac{2}{k} \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Ma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \Theta(1)$ (numeri armonici) da cui $E = O(n\, logn)$.